

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Definición de topografía

El término topografía procede del griego y su traducción más literal es dibujar lugares ( topo es lugar y grafo dibujo ).

Es conveniente introducir en primer lugar una definición de topografía ampliamente aceptada:

*Topografía es la técnica que tiene por objeto captar y representar gráficamente la información tridimensional del terreno, así como posicionar sobre el mismo, materializando físicamente, una obra de ingeniería proyectada sobre un plano o mapa previamente realizado.*

El análisis detallado de la definición anterior pasa por desarrollar los conceptos que lleva implícitos.

El terreno objeto de representación está integrado tanto por los accidentes naturales como por los artificiales, resultado de la actividad humana.

A partir de la captación y representación gráfica de un objeto obtenemos un modelo del mismo. Todo modelo es una simplificación de la realidad en el sentido de que se simplifica su geometría y se deja de incluir en la representación información del mismo. La simplificación de la geometría está directamente relacionada con el concepto de escala, cuanto menor sea la escala, menor detalle se puede representar, mayor debe ser la simplificación de la geometría. El tipo de información a representar está directamente relacionada con el objeto final del trabajo, hay fines a los que puede ir destinado un producto cartográfico que no precisen de cierta información.

La información tridimensional del terreno se refiere tanto a forma como a dimensiones. Esta información queda materializada a través de la asignación a cada punto de una posición respecto a un sistema de referencia, de unas coordenadas  $(x, y, z)$ . La posición puede tener un carácter absoluto si el sistema de referencia está ligado a la definición oficial para el territorio nacional, o local si el sistema de referencia se define para el trabajo en cuestión.

El proceso de captar información tridimensional se conoce como levantamiento topográfico. Se realiza a partir de mediciones utilizando instrumentos y métodos adecuados para cada caso.

El proceso de representación gráfica consiste en la realización de un plano o mapa donde aparezcan convenientemente representados los detalles levantados. En la actualidad la representación gráfica se realiza de forma digital a través de programas de diseño asistido por ordenador (CAD), con independencia de que se realice también su salida gráfica a papel.

El proceso de materializar sobre el terreno una obra de ingeniería proyectada sobre un plano se conoce como replanteo topográfico. En las diferentes fases del proceso constructivo se van marcando sobre el terreno elementos singulares de la obra a partir de su posición proyectada sobre el plano, para lo que es necesario tener materializado en el terreno el sistema de referencia al que está referido el plano. El replanteo se realiza con un instrumental y metodología adecuados para cada caso.

De acuerdo a la definición, las tres actuaciones topográficas más importantes son: el levantamiento topográfico, la representación cartográfica y el replanteo topográfico.

Las figuras 1.1 y 1.2 ilustran los conceptos de levantamiento topográfico y replanteo topográfico, respectivamente.

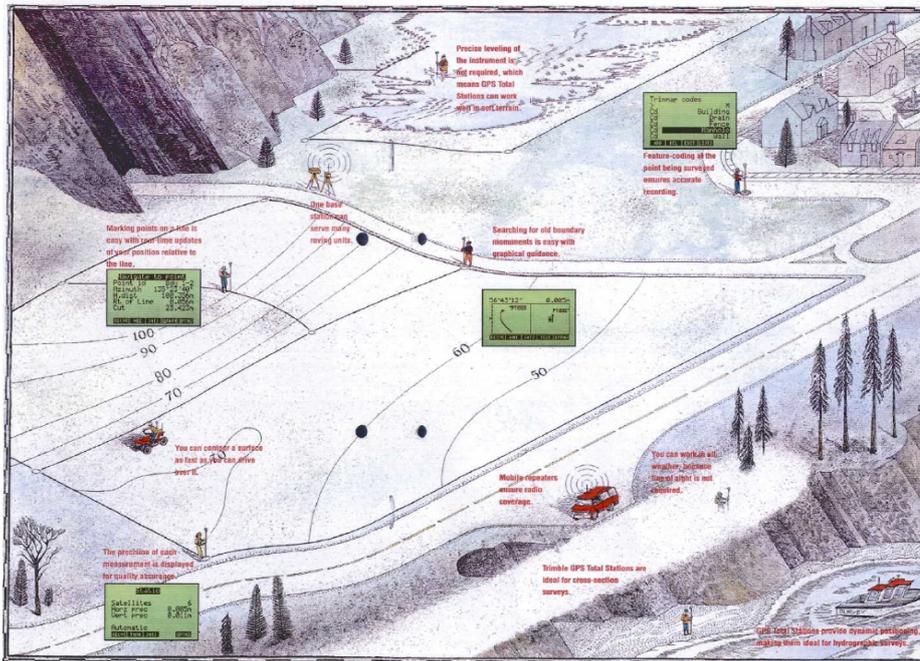


Figura 1.1: Levantamiento topográfico



Figura 1.2: Replanteo topográfico

En el argot topográfico se suele distinguir entre trabajos de campo y de gabinete. Los trabajos de campo son los que se realizan en la zona de actuación, incluyendo las labores de medición, reconocimiento, supervisión, control, ... Por trabajo de gabinete se entiende todo el trabajo realizado en oficina, ya se trate de cálculos, edición cartográfica, preparación de documentación, redacción de informes, ... Tanto el levantamiento topográfico como el replanteo exige de trabajos de campo, utilizándose instrumentos y métodos de medición muy similares. En las tres actuaciones se recurre a trabajos de gabinete.

Esta asignatura se centra principalmente en el levantamiento topográfico. La representación cartográfica se estudia en las asignaturas *Sistemas de Representación y Fotogrametría*, *Cartografía*, y el replanteo topográfico se imparte en las asignaturas *Caminos Rurales y Construcciones y vías forestales*.

## 1.2. La topografía en la ingeniería

La topografía es una disciplina incluida en los planes de estudio de la mayoría de las titulaciones de ingeniería de nuestro país relacionadas con el proceso constructivo, dado que casi todos los proyectos constructivos precisan de un modelo del terreno en el que se ubica la actuación o de un proceso de materialización del proyecto sobre el terreno.

A lo largo de la realización de una obra de ingeniería, desde que surge la iniciativa de llevarla a cabo hasta la finalización de la misma, hay una serie de fases secuenciales en que la aplicación de técnicas topográficas es ineludible. Estas fases son: anteproyecto, proyecto, ejecución y control.

La topografía, en cuanto al anteproyecto y proyecto de una obra, va a aportar una representación cartográfica de la superficie terrestre de la zona donde se va a ubicar. La calidad de representación en cuanto al detalle y en cuanto a la precisión geométrica, cantidad de información representada y escala, será función de las necesidades de la misma. Mientras que para realizar estudios de anteproyecto se suele recurrir a cartografía existente, el diseño del proyecto exige realizar la cartografía adecuada a la exigencia de calidad y actualización. Se presenta el primer trabajo del ingeniero director del proyecto: confeccionar la cartografía.

Sobre la cartografía obtenida se puede realizar el diseño geométrico de la obra, que permitirá definir mediante elementos puntuales lineales y superficiales, con posición expresada por coordenadas cartesianas en un determinado sistema de referencia, la solución adoptada.

Para la ejecución de la obra, o materialización sobre el terreno de los elementos singulares que la definen, se recurre a los vértices topográficos, que configuran la red topográfica. Estos han sido utilizados en la etapa de generación cartográfica y son los eslabones de enganche con la obra a construir. A la operación de posicionamiento en el propio terreno de los puntos significativos de la obra se la conoce como replanteo.

Toda obra se realiza con un determinado fin. Para que cumpla con su objetivo es preciso que su ejecución se ajuste a proyecto. Para verificar el cumplimiento del proyecto se llevan a cabo los oportunos trabajos de control de ejecución.

Existen obras con exigencias de precisión muy elevadas y cuyo comportamiento frente a esfuerzos y cargas deben cumplir comportamientos previstos en proyecto. En este tipo de obras suele ser necesario realizar los trabajos de topografía de más alta precisión, los trabajos de control de deformaciones, en los que se llega a evaluar el milímetro. En este tipo de trabajos se recurre a mediciones sobre puntos singulares en campañas separadas en el tiempo y mediante la contrastación de las coordenadas en las diferentes épocas de observación se deducen los movimientos acontecidos.

## 1.3. Magnitudes empleadas en topografía

En topografía se trabaja con diferentes tipos de magnitudes: lineales, superficiales, de volumen y angulares. Otras magnitudes utilizadas son: tiempo, presión, temperatura, ...

En esta sección se estudian las unidades más frecuentes para cada magnitud, exponiéndose también cuestiones relativas al número de decimales.

En el artículo único del REAL DECRETO 1317/1989, de 27 de octubre de 1989, por el que se establecen las Unidades Legales de Medida, publicado el 3 de noviembre, se dice que *El Sistema legal de Unidades de Medida obligatorio en España es el sistema métrico decimal de siete unidades*

Magnitud	Nombre	Símbolo
Longitud	metro	$m$
Masa	kilogramo	$kg$
Tiempo	segundo	$s$
Intensidad de corriente eléctrica	ampere	$A$
Temperatura termodinámica	kelvin	$K$
Cantidad de sustancia	mol	$mol$
Intensidad luminosa	candela	$cd$

Cuadro 1.1: Unidades básicas del Sistema Internacional de Unidades

Magnitud	Nombre	Símbolo	Expresión en unidades SI básicas
Ángulo plano	Radián	$rad$	$m m^{-1} = 1$
Ángulo sólido	Estereoradián	$sr$	$m^2 m^{-2} = 1$

Cuadro 1.2: Unidades suplementarias sin dimensión del Sistema Internacional de Unidades

básicas, denominado *Sistema Internacional de Unidades (SI)*, adoptado en la *Conferencia General de Pesas y Medidas y vigente en la Comunidad Económica Europea*.

La tabla *Unidades básicas del Sistema Internacional de Unidades* incluye las unidades básicas del *Sistema Internacional de Unidades (SI)*.

El metro, según acuerdo adoptado en la *XVII Conférence Générale des Poids et Mesures del 20 de Octubre de 1983*, es la longitud de trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un tiempo de  $1/299\,792\,458$  de segundo.

En topografía, en ciertos casos, se puede llegar a necesitar hasta la cuarta cifra decimal de metro, es decir, la décima de milímetro. En fotogrametría se trabaja incluso con el micrómetro ( $1\ \mu m = 10^{-6}\ m$ ). Los instrumentos de medida de distancias alcanzan a utilizar la décima de milímetro.

El segundo es la duración de  $9\,192\,631\,770$  periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

La utilización del sistema GPS en topografía obligará a incluir la definición de otras unidades de tiempo. Los relojes más precisos de los satélites GPS, los máser de hidrógeno, permiten medir hasta  $10^{-14}\ s$ .

El radián es el ángulo plano comprendido entre dos radios de un círculo que, sobre la circunferencia de dicho círculo, interceptan un arco de longitud igual a la del radio.

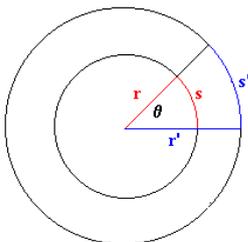


Figura 1.3: Definición de radián

Magnitud	Nombre	Símbolo	Relación
Ángulo plano	vuelta		$1vuelta = 2\pi rad$
	grado	°	$(\pi/180)rad$
	minuto de ángulo	'	$(\pi/10800)rad$
	segundo de ángulo	"	$(\pi/648000)rad$
Tiempo	minuto	mín	60 s
	hora	h	3600 s
	día	d	86400 s

Cuadro 1.3: Otras unidades derivadas del SI

La definición de radián corresponde, de acuerdo a la figura 1.3, con la relación entre arco y radio,

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{s'}{r'} \quad (1.1)$$

Dado que el ángulo completo de la circunferencia es  $2\pi$ , se deduce que la longitud de la circunferencia de radio 1 m. será  $2\pi$  m.

Las unidades SI derivadas se definen de forma que sean coherentes con las unidades básicas y suplementarias, es decir, se definen por expresiones algebraicas bajo la forma de productos de potencias de las unidades SI básicas y/o suplementarias con un factor numérico igual 1. Varias de estas unidades SI derivadas se expresan simplemente a partir de las unidades SI básicas y suplementarias. Otras han recibido un nombre especial y un símbolo particular.

Si una unidad SI derivada puede expresarse de varias formas equivalentes utilizando, bien nombres de unidades básicas y suplementarias, o bien nombres especiales de otras unidades SI derivadas, se admite el empleo preferencial de ciertas combinaciones o de ciertos nombres especiales, con el fin de facilitar la distinción entre magnitudes que tengan las mismas dimensiones. Por ejemplo, el hertz se emplea para la frecuencia, con preferencia al segundo a la potencia menos uno, y para el momento de fuerza, se prefiere el newton metro al joule.

En topografía se acostumbra a utilizar diferentes unidades angulares además del radián: la graduación sexagesimal y la graduación centesimal.

La graduación sexagesimal se define estableciendo que la circunferencia completa se divide en 360 grados, cada grado en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos.

La graduación centesimal se define estableciendo que la circunferencia completa se divide en 400 grados, cada grado en 100 minutos y cada minuto en 100 segundos.

La relación entre las tres unidades angulares queda definida por la siguiente expresión

$$\frac{[\theta]_r}{\pi} = \frac{[\theta]_d}{180} = \frac{[\theta]_g}{200} \quad (1.2)$$

La graduación sexagesimal se puede expresar en diferentes formatos:

- Decimal.- Se conoce como DEG y es la expresión en la que se utiliza un único número real en el que la parte entera es el número de grados, de 0 a 359, y la decimal es la fracción decimal de grado.
- Grados, minutos y segundos.- Se conoce como DMS (degree, minute, second) y es la expresión en la que se utilizan un entero de 0 a 359 para expresar los grados, un entero de 0 a 59 para expresar los minutos y un número real para expresar los segundos, correspondiendo la parte entera a los segundos, de 0 a 59, y la parte decimal a la fracción decimal de segundo. El paso entre las expresiones DMS y DEG corresponde a

$$[\theta]_{DEG} = grad + \frac{mín}{60,0} + \frac{sec}{3600,0} \quad (1.3)$$

DMS	DEG	GRAD	RAD
1°	1,000E + 00	1,111E + 00	1,745E - 02
1'	1,667E - 02	1,852E - 02	2,909E - 04
1''	2,778E - 04	3,086E - 04	4,848E - 06
0,1''	2,778E - 05	3,086E - 05	4,848E - 07
0,01''	2,778E - 06	3,086E - 06	4,848E - 08
0,001''	2,778E - 07	3,086E - 07	4,848E - 09
0,0001''	2,778E - 08	3,086E - 08	4,848E - 10

Cuadro 1.4: Relación de grados, minutos y segundos sexagesimales con grados centesimales y radianes

DMS	seudo-decimal	DEG	GRAD	RAD
301°43'21,505''	301,4321505	301,7226402	335,247378	5,2660535
7°4'12,810''	7,0412810	7,070225	7,8558055	0,123398705

Cuadro 1.5: Expresión de ángulos en las diferentes unidades

$$\begin{aligned}
 grad &= parte\_entera([\theta]_{DEG}) \\
 [resto\_grad]_{grad} &= parte\_decimal([\theta]_{DEG}) \\
 [resto\_grad]_{mín} &= [resto\_grad]_{grad} \cdot 60 \\
 mín &= parte\_entera([resto\_grad]_{mín}) \\
 [resto\_mín]_{mín} &= parte\_decimal([resto\_grad]_{mín}) \\
 [resto\_mín]_{sec} &= [resto\_mín]_{mín} \cdot 60 \\
 sec &= [resto\_mín]_{sec}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

- Pseudo-decimal.- Es la expresión en la que se utiliza un número real cuya parte entera corresponde a los grados, de 0 a 359, los dos primeros decimales son los segundos, de 00 a 59, los dos siguientes decimales son los segundos, de 00 a 59, y los decimales restantes son la fracción decimal de segundo.

En topografía se llega a utilizar la diezmilésima de segundo sexagesimal (cuarta cifra decimal) para expresar las coordenadas latitud y longitud, tal y como se justificará en un capítulo posterior. Los instrumentos de medida angular alcanzan hasta la décima de segundo sexagesimal o centesimal.

Magnitud	Nombre	Símbolo
Superficie	metro cuadrado	$m^2$
Volumen	metro cúbico	$m^3$
Velocidad	metro por segundo	$m/s$ o $m s^{-1}$
Aceleración	metro por segundo cuadrado	$m/s^2$ o $m s^{-2}$
Número de ondas	metro a la potencia menos uno	$m^{-1}$
Masa en volumen	kilogramo por metro cúbico	$kg/m^3$ o $kg m^{-3}$
Velocidad angular	radián por segundo	$rad/s$ o $rad s^{-1}$
Aceleración angular	radián por segundo cuadrado	$rad/s^2$ o $rad s^{-2}$

Cuadro 1.6: Unidades derivadas del Sistema Internacional de Unidades expresadas a partir de unidades básicas y suplementarias

Factor de escala	Variación en una distancia de 1 km	Expresión en ppm
1,000100	incrementa 0.1 m (100 mm./km.)	100
1,000010	incrementa 0.01 m (10 mm./km.)	10
1,000001	incrementa 0.001 m (1 mm./km.)	1
0,999999	decrementa 0.001 m (1 mm./km.)	-1
0,999990	decrementa 0.01 m (10 mm./km.)	-10
0,999900	decrementa 0.1 m (100 mm./km.)	-100

Cuadro 1.7: Concepto de factor de escala y relación entre tanto por uno y parte por millón

Factor	Prefijo	Símbolo	Factor	Prefijo	Símbolo
$10^{24}$	yotta	Y	$10^{-1}$	deci	d
$10^{21}$	zeta	Z	$10^{-2}$	centi	c
$10^{18}$	exa	E	$10^{-3}$	mili	m
$10^{15}$	peta	P	$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{12}$	tera	T	$10^{-9}$	nano	n
$10^9$	giga	G	$10^{-12}$	pico	p
$10^6$	mega	M	$10^{-15}$	femto	f
$10^3$	kilo	k	$10^{-18}$	atto	a
$10^2$	hecto	h	$10^{-21}$	zepto	z
$10^1$	deca	da	$10^{-24}$	yocto	y

Cuadro 1.8: Múltiplos y submúltiplos decimales

En lo que se refiere a las superficies existe un gran número de unidades empleadas en agronomía con carácter local.

La unidad en la que se expresa una superficie en topografía está relacionada con el tamaño. Así, para pequeñas superficies, tal como un solar de suelo urbano, se suele utilizar la del SI, los metros cuadrados. Para superficies mayores, tal como una parcela de suelo rústico, se suele recurrir a la hectárea, que corresponde a cien áreas o a diezmil metros cuadrados. En cualquier caso es raro que se incluyan más de dos cifras decimales.

Otra magnitud que se utiliza en topografía es el factor de escala, siendo la unidad más frecuente en la que se expresa el tanto por uno, aunque también es frecuente que aparezca en partes por millón (*ppm*).

El número de decimales con el que se exprese una magnitud está directamente relacionada con su precisión, de manera que no tiene ningún sentido expresar una superficie en metros cuadrados con cuatro decimales si su precisión es de la décima de metro cuadrado.

## 1.4. El concepto de acimut

El acimut es uno de los conceptos básicos de topografía que conviene asimilar lo antes posible.

En topografía la posición espacial de los puntos se expresa a partir de sus coordenadas en un determinado sistema de referencia. La posición de un punto en un sistema de referencia se puede expresar en diferentes sistemas de coordenadas. En topografía lo más frecuente es trabajar con coordenadas cartesianas, de manera que la posición de un punto genérico  $P$  se expresa por las coordenadas  $(x, y, z)$ , que a menudo se acostumbra a distinguir en posición planimétrica,  $(x, y)$ , y altimétrica,  $z$ .

La posición relativa de dos puntos, el vector definido por tener a los puntos como extremos, también se puede expresar en diferentes sistemas de coordenadas, siendo lo más frecuente utilizar coordenadas cartesianas,  $(x_j - x_i, y_j - y_i, z_j - z_i) \equiv (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ , o coordenadas polares, siendo una de ellas el acimut.

Magnitud	Condición que cumplen los puntos	Expresión
Sentido positivo del eje de ordenadas	$\Delta x = 0$ y $\Delta y > 0$	0
Primer cuadrante	$\Delta x > 0$ y $\Delta y > 0$	$\arctan\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)$
Sentido positivo del eje de abcisas	$\Delta x > 0$ y $\Delta y = 0$	$\frac{\pi}{2}$
Segundo cuadrante	$\Delta x > 0$ y $\Delta y < 0$	$\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{ \Delta y }{\Delta x}\right)$
Sentido negativo del eje de ordenadas	$\Delta x = 0$ y $\Delta y < 0$	$\pi, 180^\circ, 200^g$
Tercer cuadrante	$\Delta x < 0$ y $\Delta y < 0$	$\pi + \arctan\left(\frac{ \Delta x }{ \Delta y }\right)$
Sentido negativo del eje de abcisas	$\Delta x < 0$ y $\Delta y = 0$	$\frac{3\pi}{2}$
Cuarto cuadrante	$\Delta x < 0$ y $\Delta y > 0$	$\frac{3\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\Delta y}{ \Delta x }\right)$

Cuadro 1.9: Cálculo del acimut en función del cuadrante

Acimut se define como el ángulo que forma el vector con el sentido positivo del eje de ordenadas y se acostumbra a denotar con el símbolo  $\theta$  o  $\alpha$ . El dominio del acimut es de 0 a  $2\pi$ . Los cuadrantes topográficos, al contrario que los trigonométricos, avanzan en el sentido horario.

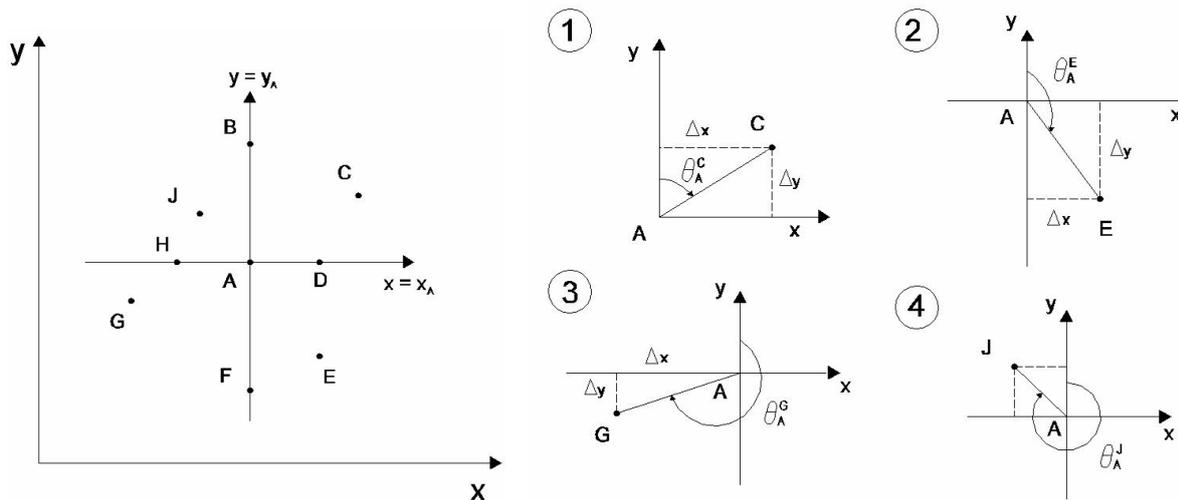


Figura 1.4: Acimut en función del cuadrante topográfico

De acuerdo a la figura 1.4, la expresión del cálculo del acimut varía en función del cuadrante.

## 1.5. Conceptos básicos de cartografía

A pesar de no ser objeto de esta asignatura el estudio de la cartografía, la estrecha relación que tiene con la topografía hace conveniente que sean abordados algunos conceptos básicos de esta disciplina.

En la figura 1.5 se observa una parte de la hoja de Albacete del MTN 1:50000.

### 1.5.1. Definición de cartografía

La cartografía tiene como finalidad la concepción, preparación, redacción y realización de todos los tipos de mapas, planos y cartas. Implica el estudio de la expresión gráfica de los fenómenos

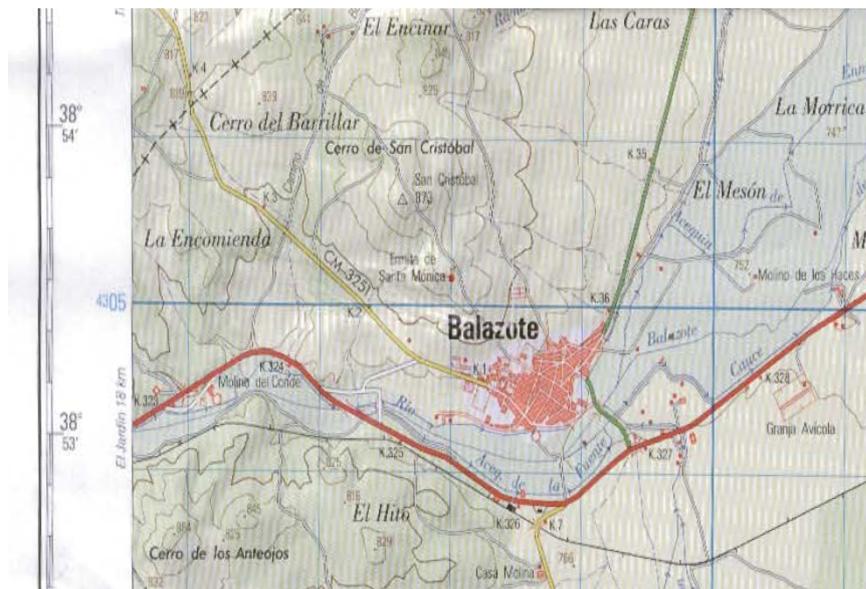


Figura 1.5: Ejemplo de MTN 1:50000

geográficos a representar y engloba el conjunto de operaciones que, partiendo de información discretizada de datos, proveniente de diferentes fuentes, culmina en una impresión ( sobre papel, en formato digital,... ) que suministra una gran cantidad de información.

Constituye una transcripción gráfica de los fenómenos geográficos.

También se puede definir la cartografía como el conjunto de estudios y operaciones científicas y técnicas que intervienen en la formación o análisis de mapas, modelos en relieve o globos, que representen la Tierra, parte de ella, o cualquier parte del Universo.

Un producto cartográfico aparece como un conjunto de trazados, signos y palabras escritas, de tipología más o menos complicada. Se trata de un esquema de la realidad y su formación obedece a numerosos acuerdos y convenciones, expresados en el propio producto o implícitos, que deben conocerse para la interpretación correcta de la información representada.

Hay productos cartográficos que pretenden únicamente ser una representación de la superficie terrestre ( accidentes naturales y artificiales ), o información georeferenciada. Otros tienen por objeto indicar la localización de determinada información que por su naturaleza es atribuible a una posición geográfica ( datos meteorológicos, ... ), o información georeferenciable. Al segundo tipo se les denomina temáticos, en oposición a los primeros o topográficos.

### 1.5.2. La forma de la Tierra

El estudio de la forma de la Tierra es uno de los principales objetivos de la geodesia, ciencia cuyos conceptos principales serán tratados en una sección posterior.

La pregunta de la figura de la Tierra ya se había planteado en la antigüedad. Después de que la esfera sirvió como primer modelo para la Tierra, el elipsoide de revolución se impuso como forma de la Tierra en la primera mitad del siglo dieciocho, abandonándose a finales del siglo diecinueve por el modelo del geoide, vigente hasta nuestros días.

#### 1.5.2.1. Modelo esférico

En el pasado prevalecieron varias opiniones sobre la forma de la Tierra, por ejemplo el disco terrestre rodeado de agua imaginado por Okeanus ( Ilíada de Homero - 800 a.C., Tales de Mileto - 600 a.C. ). Pitágoras (580/500 a.C.) y su escuela, así como Aristóteles (384/322 a.C.), entre otros, apoyaron la forma esférica.

El fundador de la geodesia científica es Eratóstenes de Cirene (276-195 a.C.). Bajo la suposición de una Tierra esférica, dedujo por mediciones, un radio para la Tierra, figura 1.6.

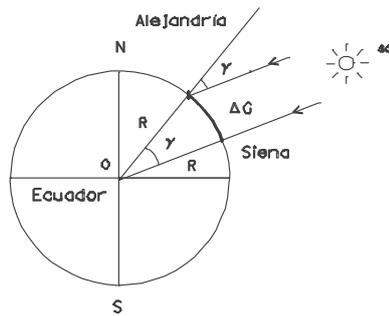


Figura 1.6: Determinación del radio terrestre

El principio del método de medida de arco que él desarrolló se utilizó prácticamente hasta épocas actuales. Mediante mediciones geodésicas se determina la longitud  $\Delta G$  de un arco de meridiano, observaciones astronómicas proporcionan el ángulo central  $\gamma$  inherente. El radio de la Tierra está dado por:

$$R = \frac{\Delta G}{\gamma} \quad (1.5)$$

Eratóstenes encontró que en la época del solsticio de verano, los rayos del sol caían verticalmente dentro de un pozo en Siena (hoy día Asuán), mientras que en Alejandría, aproximadamente en el mismo meridiano, formaban un ángulo con respecto a la dirección de la línea de la plomada. De la longitud de la sombra proyectada por una vara (*gnomon*) determinó este ángulo como  $1/50$  de un círculo completo, o sea  $\gamma = 7^{\circ}12'$ . Estimó que la distancia entre Siena y Alejandría era de 5000 estadios, sacando ese dato de los mapas catastrales egipcios. Siendo la longitud de un estadio egipcio de  $157,5 \text{ m.}$ , obtenemos un radio terrestre de  $6270 \text{ km.}$  Este valor discrepa del radio de una Tierra esférica media ( $6371 \text{ m.}$ ) por  $-2\%$ . Una determinación posterior en la antigüedad se le atribuye a Posidonio (135-51 a.C.) usando el arco de meridiano de Alejandría a Rodas, obtuvo un radio terrestre con discrepancia de  $-11\%$ .

Durante la Edad Media en Europa la pregunta sobre la figura de la Tierra no se plantea. Los árabes transmitieron una medición de arco hecha por el Califa de Al-Mámun (827) al noroeste de Bagdad ( $+10\%$  de desviación). En los inicios de la era moderna, el físico francés Fernel observó en 1525 en el meridiano de París las latitudes geográficas de París y Amiens, usando un cuadrante; la distancia la calculó del número de rotaciones de una rueda de carreta ( $+0,1\%$  de desviación).

Las mediciones de arco restantes basadas en la noción de una Tierra esférica se caracterizan por avances fundamentales en tecnología instrumental (1611, telescopio de Kepler) y metodología (después de la aplicación inicial de triangulación elaborada por Gemma Frisius -1508,1555-en los Países Bajos, y por Tycho Brahe -1546,1601- en Dinamarca, el holandés Willebrod Snellius -1580,1626- dirigió la primera triangulación para determinar la figura de la Tierra).

A través de la iniciativa de la Academia de Ciencias fundada en París en 1666, Francia asumió en los siglos diecisiete y dieciocho el liderazgo en geodesia. El abate francés J. Picard llevó a cabo en 1669/70 una medición de arco en el meridiano de París entre Malvoisine y Amiens con la ayuda de una triangulación, siendo él el primero en usar un telescopio con hilos en la retícula. El valor que obtuvo para el radio de la Tierra ( desviación de  $+0,01\%$  ) sirvió a Newton para la verificación de la ley de la gravedad que había formulado en 1665/66.

### 1.5.2.2. Modelo elipsoidal

En los siglos dieciséis y diecisiete provienen de la astronomía y la física nuevas observaciones e ideas que tienen una influencia decisiva.

Nicolás Copérnico (1473-1543) logró la transición del universo geocéntrico de Tolomeo a un sistema heliocéntrico (1543: *De revolutionibus orbium coelestium*), ya postulado por Aristarco de Samos (320-250 a.C.). Kepler (1571-1630) descubrió las leyes del movimiento planetario (1609: *As-*

*tronomía nova ...*, 1619: *Harmonices mundi*), y Galileo Galilei (1564-1642) desarrolló mecanismos modernos (ley de la caída de los cuerpos, ley del movimiento del péndulo).

En 1666 el astrónomo J. D. Cassini observó el achatamiento de los polos de Júpiter. El astrónomo J. Richer descubrió en 1672, con motivo de una expedición a Cayena para determinar paralajes de Marte, que él debía acortar la longitud de un péndulo de segundos que había ajustado en París para volver a obtener oscilaciones de un segundo. De esta observación y con base en la ley del movimiento pendular se puede concluir que existe un incremento en gravedad del ecuador a los polos. Basándose en estos trabajos y en los suyos propios Isaac Newton (1643-1727) y Christian Huygens (1629-1695) desarrollaron modelos terrestres, basados en principios de física, que tenían los polos achatados.

Newton (1687: *Philosophiae naturalis principia mathematica*) obtuvo la forma de un elipsoide de revolución como la figura de equilibrio para una Tierra homogénea, líquida y rotacional basada en la validez de la ley de la gravitación universal.

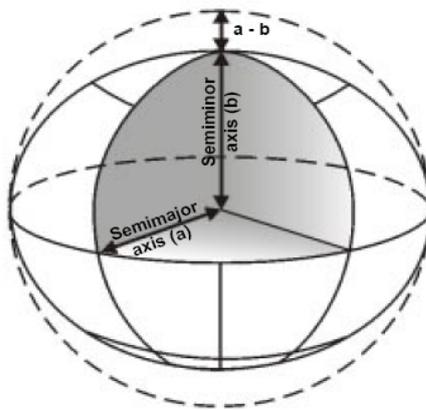


Figura 1.7: Elipsoide de revolución

El achatamiento,

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (1.6)$$

( $f$  = achatamiento,  $a$  = semieje mayor,  $b$  = semieje menor) en este caso es de  $1/230$ . Huygens (1690: *Discours de la Cause de la Pesanteur*) desplaza el origen de las fuerzas de atracción terrestres al centro de la Tierra y desarrolla una superficie equilibrada, simétrica, rotacional, que tiene una curva meridiana con  $f = 1/578$ .

Frente al modelo de elipsoide achatado por los polos aparece el modelo con achatamiento en el ecuador obtenido por La Hire y Cassini (1683-1718), quienes prolongaron el arco de Picard al Norte hacia Dunkerque y al Sur hacia Collioure. Los cálculos de dos segmentos de arco dieron un achatamiento negativo de  $f = -1/95$ , que puede atribuirse particularmente a errores de medición de las latitudes astronómicas. Las intensas disputas entre los partidarios del modelo de Newton y los de Cassini sobre la figura de la Tierra fue resuelta por dos mediciones de arco posteriores auspiciadas por la Academia Francesa de Ciencias.

La figura 1.8 ilustra las dos alternativas para el achatamiento del elipsoide.

Maupertius, Clairaut y Celsius, entre otros, participaron en la expedición a Laponia (1736/37). Jorge Juan, Antonio de Ulloa y Louis Godin, entre otros, participaron en la expedición a Perú (1735/43). Como resultado de estas medidas, una cerca del polo y otra cerca del ecuador, en 1756 se pudo probar la validez del modelo de Newton. En palabras de Voltaire, *...la expedición había aplastado los polos y a Cassini*.

La figura 1.9 ilustra la relación entre el radio del meridiano y la latitud, concluyéndose que a mayor latitud el radio es mayor para una misma longitud de arco de meridiano y un mismo ángulo.

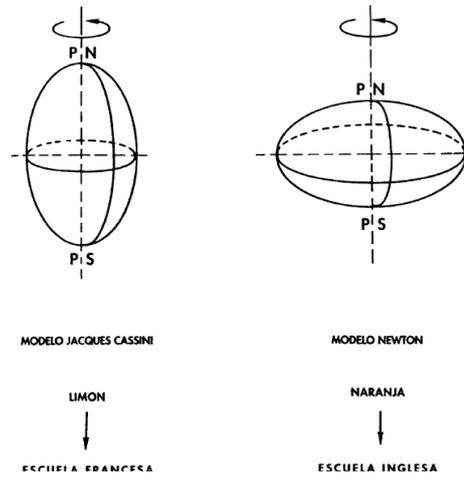


Figura 1.8: Alternativas de Newton y Cassini para la forma de la Tierra

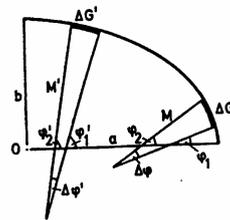


Figura 1.9: Variación del radio de terrestre con la latitud

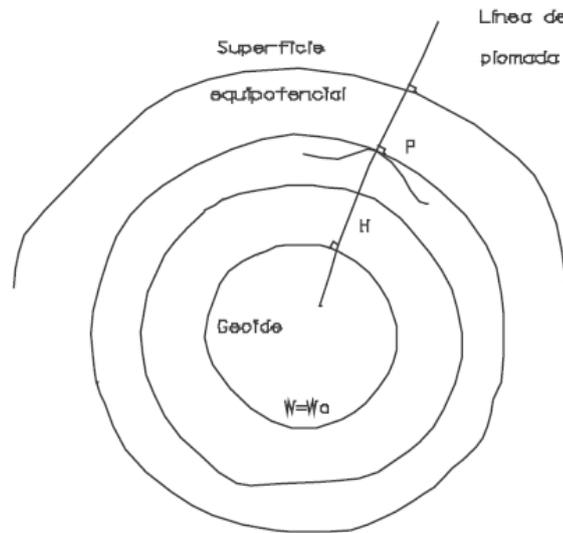


Figura 1.10: Geoide como forma adoptada para la superficie terrestre

Una síntesis entre la fundamentación física y geodésica de la forma elipsoidal de la Tierra fue finalmente lograda por Clairaut (1713-1765) con el teorema que lleva su nombre en 1743, y que permite el cálculo del achatamiento a partir de dos mediciones de gravedad en diferentes latitudes.

### 1.5.2.3. Modelo de geoide

Después de que el elipsoide rotacional se había aceptado como modelo de la Tierra se realizaron numerosas mediciones de arco hasta mediados del siglo diecinueve para determinar las dimensiones de este elipsoide terrestre global. La longitud de arco se obtenía mediante una triangulación. Se realizaron mediciones de arco a lo largo de un meridiano elipsoidal (medición de arco de latitud), a lo largo de un paralelo (medida de arco de longitud), y mediciones de arco inclinadas al meridiano.

Como Laplace (1802), Gauss (1828), Bessel (1837), y otros ya habían reconocido, la suposición de un modelo terrestre elipsoidal no se puede sostener teniendo una precisión de observación suficientemente alta. No se puede ignorar la desviación de la dirección de la plomada física, a la cual están referidas las medidas, y de la normal al elipsoide (desviación de la vertical).

A pesar de estas discrepancias, se adoptaron en la mayoría de los países numerosos ajustes hasta mediados del siglo diecinueve para determinar las dimensiones del elipsoide, en donde las desviaciones de la vertical, siendo causadas físicamente, y por tanto teniendo características sistemáticas, se trataban como errores de observación accidentales.

La definición de geodesia de Friedrich Robert Helmert de 1880: *Ciencia de medida y representación de la superficie terrestre* se refiere explícitamente a la forma física de la Tierra, es decir a su superficie topográfica, pero incluye implícitamente la determinación del campo gravitatorio, ya que la forma de la Tierra y las observaciones geodésicas que sobre la misma se realizan se entienden condicionadas por este campo de fuerzas.

Se produce la transición al concepto actual de la figura de la Tierra, modelo del Geoide como superficie equipotencial del campo gravitatorio terrestre adoptada como origen, figura 1.10.

La determinación del geoide fue por cerca de 70 años (1880-1950) la meta principal de la geodesia. Su importancia disminuyó después de 1945 con el desarrollo de métodos para la derivación directa de la superficie física de la Tierra. Sin embargo, su determinación aún permanece como un problema esencial de la geodesia.

### 1.5.3. Mapas, planos y cartas

Se denomina mapa a toda representación plana de una parte de la superficie terrestre que, por su extensión y debido a la curvatura de la superficie de referencia adoptada para la Tierra, requiera hacer uso de sistemas proyectivos analizados por la Cartografía Matemática, o dicho de otra forma, cuando no es válido simplificar la forma de la Tierra por un plano.

Se define plano como *mapa en el que se representa una superficie suficientemente limitada para que se haya prescindido de la curvatura de la Tierra en su formación*. Por tanto, por la escasa extensión de superficie a que se refiere, no exige hacer uso de sistemas proyectivos. Además la relación entre medidas sobre la superficie de la Tierra y medidas en el plano, escala, puede considerarse constante.

En general, si pretendemos que cualquier producto cartográfico tenga utilidad métrica, es decir, que a partir de medidas sobre el mismo seamos capaces de obtener la misma magnitud real sobre el terreno, es imprescindible hacer uso correcto de las transformaciones aportadas por la cartografía matemática.

Otra forma de distinguir entre plano y mapa es según el sistema de referencia en que se obtengan los puntos a representar, denominándose mapa cuando el sistema de referencia es geodésico y plano cuando el sistema de referencia es local.

Las cartas son mapas destinados normalmente a la navegación aérea o marítima. También se emplean para representar particularidades físicas del mar, como profundidades, corrientes, materiales de fondo, ...

### 1.5.4. Principales problemas asociados a la representación cartográfica

Dos son los problemas principales a resolver en el proceso de representación cartográfica, figura 1.11.

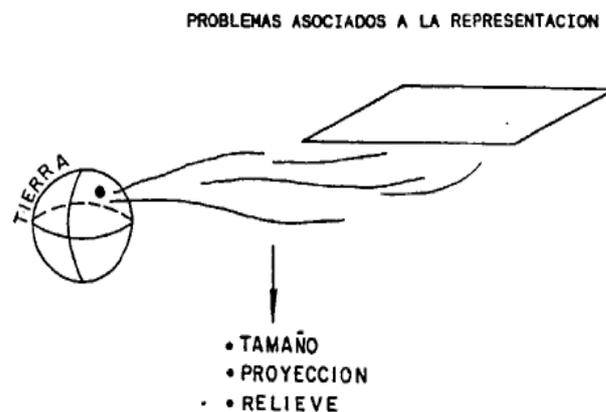


Figura 1.11: Problemas asociados a la representación cartográfica

En primer lugar pretendemos representar sobre un plano una porción, o incluso la totalidad, de la superficie de referencia, incluyendo entre toda la información la del relieve, orografía o accidentes naturales del terreno.

Para solventarlo hemos de recurrir a:

- Adoptar una escala de representación, de forma que una amplia superficie quede representada en pequeñas dimensiones.
- Una discretización de la superficie topográfica a representar y de la información en ella contenida. No es sino una generalización, pasar del total de información del terreno a aquella que interese representar tanto en cuanto a información georeferenciada como georeferenciable, en función del factor de escala del producto cartográfico y del uso al que vaya destinado.

- Adoptar un sistema de representación del relieve sobre un plano, normalmente el sistema de planos acotados.

En segundo lugar, a no ser que la superficie de referencia sea un plano, nos encontramos con el problema de que tanto la superficie de una esfera como la de un elipsoide no son desarrollables sobre un plano. Este problema se resuelve mediante la cartografía matemática. Nos permite establecer una correspondencia biunívoca entre la superficie de referencia y el plano con deformaciones controladas.

### 1.5.5. La escala en cartografía

Al igual que en la mayoría de representaciones geométricas de objetos, en cartografía no es posible representar el territorio a tamaño natural.

La escala es la razón de semejanza entre el terreno y su representación sobre el plano.

En cartografía se acostumbra a expresar la escala en forma numérica y gráfica.

- La escala numérica viene definida por la relación constante:

$$E = \frac{\text{longitud cartografía}}{\text{longitud terreno}} \quad (1.7)$$

- La escala gráfica ordinaria, figura 1.12, se representa por una recta dividida en partes iguales, anotando en cada una, a partir del origen, la magnitud equivalente del terreno.



Figura 1.12: Escala gráfica

En principio, la escala puede adoptar cualquier valor. Sin embargo, son usuales escalas cuyo numerador sea la unidad y el denominador números naturales. De esta forma, una escala de 1/1000 indica que cada parte del plano representa mil partes sobre el terreno, o equivalentemente, que un milímetro del plano representa un metro del terreno.

En función del valor de la escala se suele realizar una clasificación de la cartografía en:

- Mapas generales, de muy pequeña escala.- menor o igual que 1/1000000.
- Mapas geográficos, de pequeña escala.- 1/800000, 1/500000, 1/400000
- Mapas topográficos, de escala media.- 1/200000, 1/100000, 1/50000, 1/25000
- Planos topográficos de gran escala.- 1/10000, 1/5000, 1/2000, 1/1000, 1/500
- Planos técnicos.- 1/200, 1/100, 1/50

### 1.5.6. El límite de percepción visual

La calidad geométrica de un mapa o plano está directamente relacionada con su escala y con el concepto de límite de percepción visual. Esta cuestión es de gran importancia en cartografía pues da lugar a una limitación de la cantidad de información representada, lo que está directamente relacionado con el trabajo de captación de información en el terreno. Por convenio, se admite que la vista humana puede alcanzar a diferenciar dos puntos en el papel cuando éstos están separados al menos una distancia de 0,2 mm. De esta forma, cualquier longitud en el terreno será despreciable, si al convertirla a la escala del plano o mapa, es igual o menor a esos 0,2 mm. El producto de 0,2 mm. por el denominador de la escala determina la distancia que resulta despreciable en el terreno.

Escala cartográfica	1 mm. sobre terreno	Precisión
1 : 500	0,5 m.	0,1 m.
1 : 1000	1 m.	0,2 m.
1 : 2000	2 m.	0,4 m.
1 : 5000	5 m.	1,0 m.
1 : 10000	10 m.	2,0 m.
1 : 25000	25 m.	5,0 m.
1 : 50000	50 m.	10,0 m.

Cuadro 1.10: Precisión planimétrica exigible a una cartografía en función de la escala

La captación de información planimétrica en campo está condicionada por la escala y por el límite de percepción visual. Su limitación dará lugar a los símbolos cartográficos, signos convencionales que se utilizarán cuando sea necesario representar en el plano o mapa detalles que no tengan representación gráfica a la escala utilizada.

### 1.5.7. Proyecciones cartográficas

Posteriormente se justificará que la superficie de referencia que se utiliza es un elipsoide de revolución, aunque para algunas aplicaciones, sobre todo cuando la escala de representación es pequeña, se puede utilizar una esfera.

A cada punto de la superficie topográfica le correspondiera un punto de la superficie de referencia, quedando vinculada al mismo toda la información asociada al punto del terreno, como por ejemplo al altitud ortométrica.

El problema que ha de resolver la cartografía matemática es cómo pasar de esa superficie de referencia al plano de representación del producto cartográfico.

El problema no es otro que la imposibilidad de desarrollar la superficie de un elipsoide o una esfera sobre un plano. Por expresarlo de una forma coloquial, no hay forma de producir una sección a esa superficie elipsódica o esférica y estirla hasta convertirla en un plano sin que aparezcan deformaciones.

Se recurre a una correspondencia biunívoca entre ambas superficies, a cada punto del elipsoide o esfera se le hace corresponder un punto sobre el plano y existirá también la correspondencia inversa de forma que desde el punto del plano se pueda regresar al punto sobre el elipsoide.

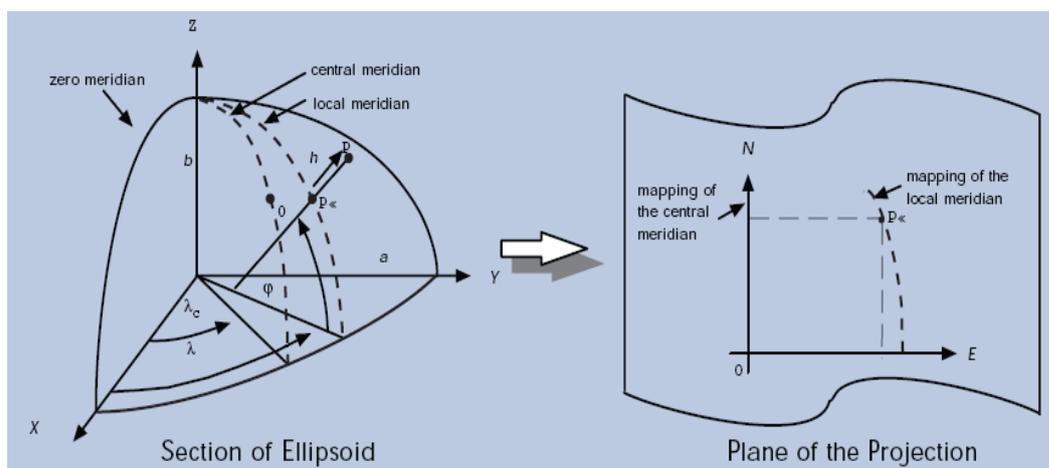


Figura 1.13: Representación plana de la superficie de referencia

Para expresar esto analíticamente se considera que un punto del elipsoide/esfera viene representado por sus coordenadas geodésicas polares latitud y longitud,  $(\varphi, \lambda)$  y el punto correspondiente

sobre el plano se representa por dos coordenadas en un sistema cartesiano bidimensional,  $(x, y)$ , figura 1.13. Existirá una función directa para pasar del elipsoide al plano y otra inversa para pasar del plano al elipsoide, de forma que:

- Proyección del elipsoide/esfera sobre el plano:

$$(x, y) = \bar{f}(\varphi, \lambda) = (f_1(\varphi, \lambda), f_2(\varphi, \lambda))$$

- Proyección del plano sobre el elipsoide/esfera:

$$(\varphi, \lambda) = \bar{g}(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$$

A cada una de las posibles transformaciones definidas por funciones de este tipo se le denomina proyección cartográfica.

Las proyecciones cartográficas se pueden clasificar en dos grupos:

- Proyecciones geométricas o perspectivas.- En estas, las funciones que definen la transformación se obtienen del análisis geométrico de la proyección. Existe un punto origen o centro de la proyección geométrica, situamos el plano de la proyección en una determinada posición y obtenemos la proyección de un punto del elipsoide en la intersección de la recta proyectiva, recta que une el origen o centro de la proyección, con el plano de la proyección. Según la posición del centro de la proyección, figura 1.14, se hablará de: gnomónica, estereográfica, ortográfica o escenográfica.

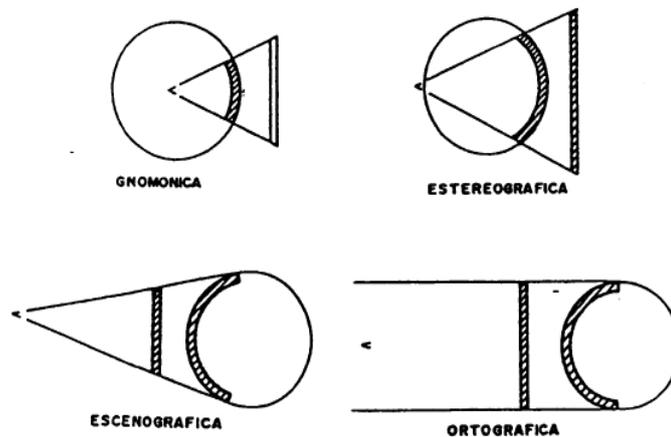


Figura 1.14: Proyecciones geométricas

- Desarrollos.- Si en lugar de proyectar directamente sobre el plano de la proyección se proyecta sobre un cono o un cilindro, figura 1.15, que ocupe una determinada posición, y después se obtiene el plano como desarrollo de estos, se hablará de desarrollos cartográficos.
- Proyecciones matemáticas.- En este caso, las funciones matemáticas que definen la transformación no tienen un fundamento geométrico exacto, si bien se suelen obtener a partir de las proyecciones geométricas con la imposición de ciertas condiciones matemáticas.

Es evidente que uno de los usos más extendidos de un producto cartográfico es obtener información métrica de la superficie terrestre en él representada, ya sean medidas distanciométricas, superficiales o angulares. Lo ideal sería utilizar una proyección cartográfica que no introdujese ninguna deformación en las medidas angulares y ninguna otra que la propia homotecia debida al factor de escala en las medidas de distancias y superficies. Pues bien, esto es imposible. No existen proyecciones cartográficas que conserven las tres magnitudes.

Se pueden clasificar también las proyecciones cartográficas en función de qué magnitudes conserven en:

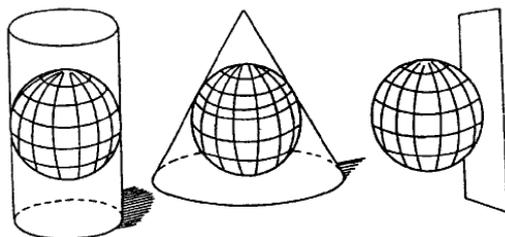


Figura 1.15: Desarrollos cartográficos

- Proyecciones conformes.- conservan los ángulos.
- Proyecciones equidistantes o afilácticas.- conservan las distancias de ciertas curvas.
- Proyecciones equivalentes.- conservan las superficies.

Hay proyecciones cartográficas que siendo conformes conservan las distancias de ciertas curvas sobre la superficie de referencia, las hay también que para ciertas zonas minimizan las tres deformaciones,...

En cualquier caso será preciso conocer qué deformaciones introduce una proyección para poder eliminarla y restituir la magnitud real. Para esto se estudia como calcular en cada punto las tres deformaciones mediante unas funciones matemáticas que se denominan módulos de deformación angular, lineal y superficial. Estos módulos de deformación, extendidos del entorno diferencial de un punto a la magnitud medida ( ángulo, distancia o superficie ), permiten restituir la magnitud real.

La elección de la proyección cartográfica se realiza en base a las deformaciones que introduce y al uso al que va destinada la cartografía. Sin embargo, al igual que existe un sistema de referencia oficial para la cartografía española, el ED50, también existe una proyección oficial o reglamentaria para toda la cartografía oficial. Según real decreto 2303/1970 de 16 de Julio de 1970 se adopta como reglamentaria en España la Proyección Universal Transversa de Mercator (U.T.M.). Esta será la proyección cartográfica que estudiaremos.

Las proyecciones cartográficas permiten, además de resolver el problema de la representación de la superficie de referencia sobre un plano, resolver problemas de cálculo de coordenadas sobre un plano utilizando la sencilla geometría plana.

## 1.5.8. La representación del relieve

### 1.5.8.1. Representación del relieve mediante curvas de nivel y puntos acotados

Aunque existen mapas sin representación alguna del relieve, es decir, puramente planimétricos, un mapa topográfico propiamente dicho no ha de pasar por alto la representación de esta información.

Acostumbra a denominarse altimetría, en oposición a planimetría, a la parte del mapa referente a la representación del relieve.

Se define la superficie topográfica como aquella que envuelve la parte sólida de la Tierra. Aunque en zonas pequeñas puede compararse con planos, conos o cilindros, esta superficie es totalmente irregular, sin posible definición geométrica. En Cartografía se representa la superficie reglada correspondiente, figura 1.16.

Los dos métodos más frecuentes para representar el relieve son el sistema de puntos acotados y el sistema de curvas de nivel, basándose ambos en el sistema de representación de planos acotados, en el que cada punto puede representarse por su proyección ortogonal sobre el plano de proyección y su separación a dicho plano medida sobre la dirección de proyección, separación que en cartografía es la altitud o cota.

El sistema de puntos acotados, figura 1.17, consiste en acompañar la posición planimétrica del punto por la rotulación de su altitud. Este sistema suele completar al de curvas de nivel para

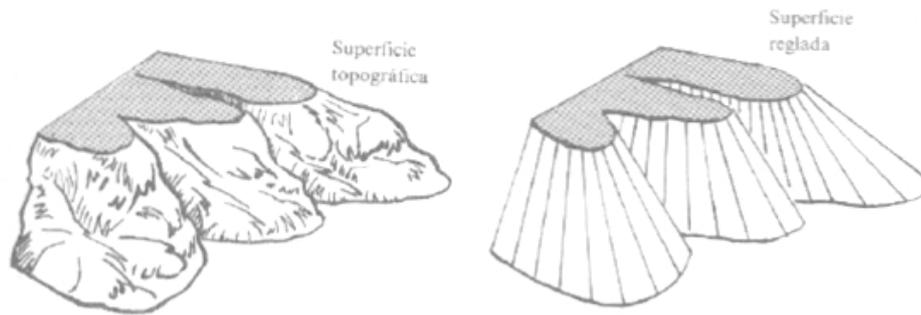


Figura 1.16: Superficie topográfica y reglada

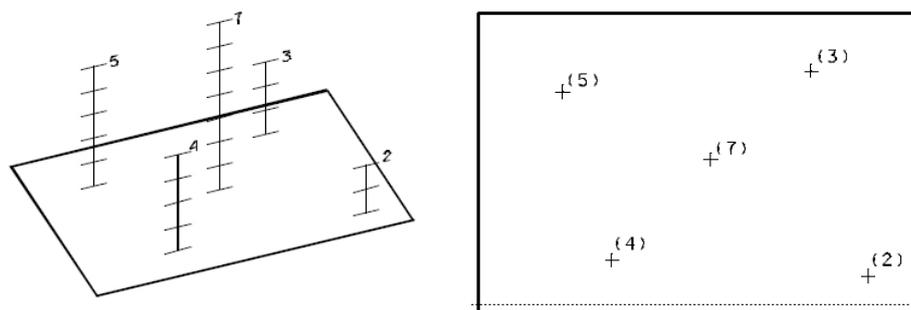


Figura 1.17: Sistema de representación del relieve por puntos acotados

marcar puntos singulares, para densificar la información altimétrica en zonas donde la ausencia de desniveles significativos motiva el que apenas aparezcan curvas de nivel, y en zonas donde se eliminan las curvas de nivel para facilitar la visualización de otros elementos, tal es el caso de la cartografía urbana.

La idea del método de representación del relieve por curvas de nivel, figura 1.18, se basa en que se representan las líneas de corte del terreno con planos horizontales separados por una cierta distancia fija. Esas líneas proyectadas reciben el nombre de curvas de nivel o isohipsas, unen puntos de igual cota al ser resultado de cortes del terreno con planos horizontales, figura 1.19.

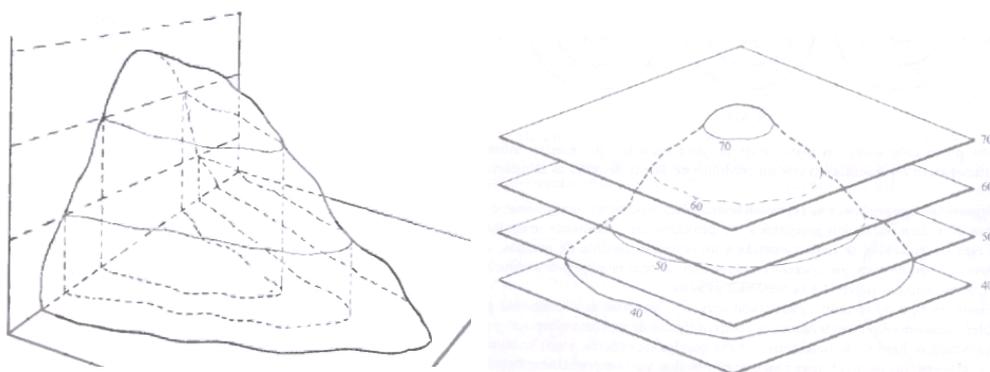


Figura 1.18: Curva de nivel

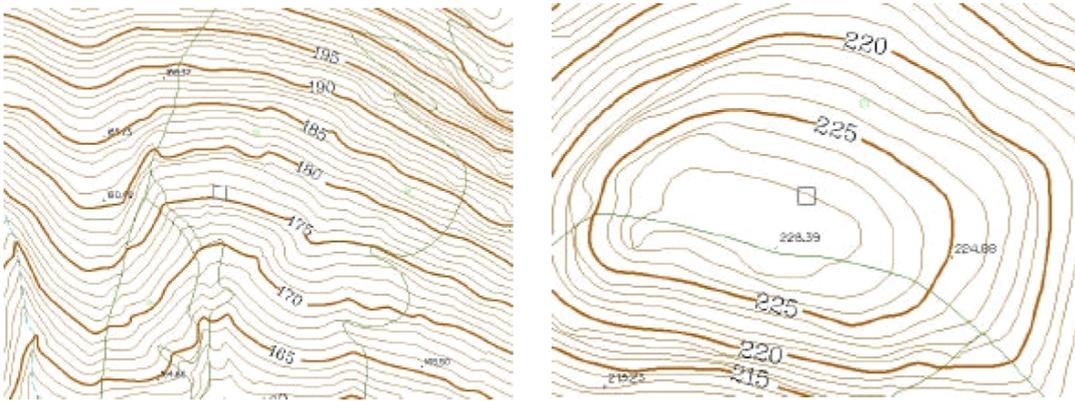


Figura 1.19: Equidistancia. Curvas maestras

Escala de cartografía	Eq. Curvas Nivel	Precisión
1 : 500	0,20 m.	0,1 m.
1 : 1000	0,5 m.	0,2 m.
1 : 2000	1,0 m.	0,4 m.
1 : 5000	2,0 m.	1,0 m.
1 : 10000	5,0 m.	2,0 m.
1 : 25000	10,0 m.	5,0 m.
1 : 50000	20,0 m.	10,0 m.

Cuadro 1.11: Escalas de vuelo para las escalas cartográficas más frecuentes

### 1.5.8.2. Equidistancia de las curvas de nivel

La distancia constante entre los planos a que corresponden las curvas de nivel se llama equidistancia de las curvas de nivel.

La equidistancia suele ser un múltiplo o divisor de 10 m. y su elección se hace teniendo en cuenta la escala del mapa y, si es posible, la naturaleza del terreno. En general, debe evitarse que dos curvas sucesivas se encuentren a menos de 0,5 mm.

Para no entorpecer la lectura del mapa, las curvas de nivel se rotulan con su cota correspondiente en las zonas de menor densificación de representación gráfica.

También se recurre a rotular más gruesas algunas curvas que aparecen cada cuatro o cinco de las corrientes. Estas curvas se denominan *curvas directoras* o *maestras*. Así, en el caso del Mapa Topográfico Nacional a escala 1/50000, la equidistancia de curvas de nivel es de 20 m. y las curvas maestras corresponden a cotas de centenas de metros (100, 200, 300 m, ...).

### 1.5.8.3. Identificación de las formas del terreno a partir de un curvado

La observación detenida de la forma de las curvas de nivel permite identificar las principales formas del terreno:

- Llanuras.- Zonas del terreno con muy poca inclinación. No son nunca totalmente planas, a no ser que se trate de formas artificiales. Al existir siempre una pendiente mínima, siempre aparecen curvas de nivel, aunque muy separadas.
- Elevaciones.- El terreno se halla por encima de la llanura; las curvas de nivel son cerradas y cada una envuelve a otra de mayor cota.

- Depresiones.- El terreno está por debajo de la llanura; las curvas de nivel son cerradas y cada una envuelve a otra de menor cota.
- Laderas.- Son zonas de la superficie topográfica asimilables a planos con una cierta inclinación.
- Divisorias.- Son líneas que dividen áreas de diferentes cuencas vertientes. Los puntos de la divisoria son puntos de cota máxima.
- Vaguadas.- Líneas de la superficie topográfica donde se reúnen las aguas de escorrentía.
- Collados.- Puntos de encuentro de divisorias y vaguadas.
- Cumbres.- Máximos absolutos o relativos de la superficie topográfica. Punto de mayor cota en una elevación del terreno.
- Simas.- Mínimos absolutos o relativos de la superficie topográfica. Punto de menor cota en una depresión del terreno.

Algunas de estas formas se pueden identificar en la figura 1.20.

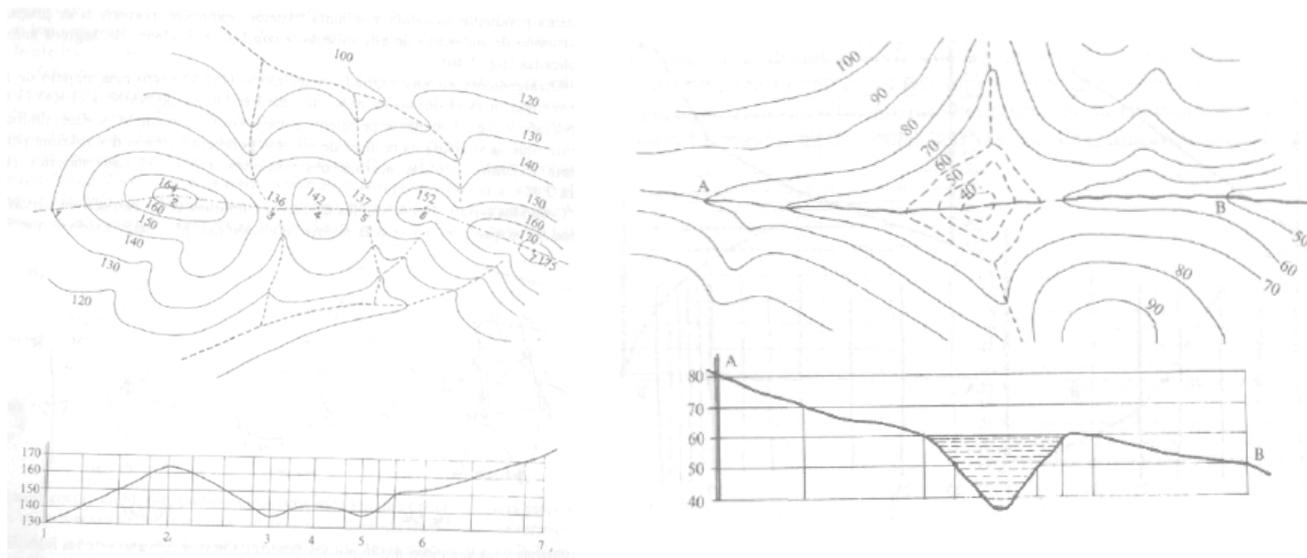


Figura 1.20: Identificación de las formas del relieve a través de las curvas de nivel

A partir de un plano con curvas de nivel, con una cierta equidistancia, se puede dibujar una curva de una cota determinada y obtener la cota de cualquier punto, figura 1.21.

Para cada sección vertical del terreno y en cada punto, existe una pendiente. El valor de la pendiente es la tangente del ángulo de inclinación. La pendiente se suele expresar en tanto por ciento. Las diversas secciones que pasan por un punto en concreto determinan otras tantas pendientes, figura 1.22. La pendiente en un punto del terreno puede variar en cada dirección, existiendo una dirección en la que se obtiene el valor máximo que se denomina *línea de máxima pendiente*.

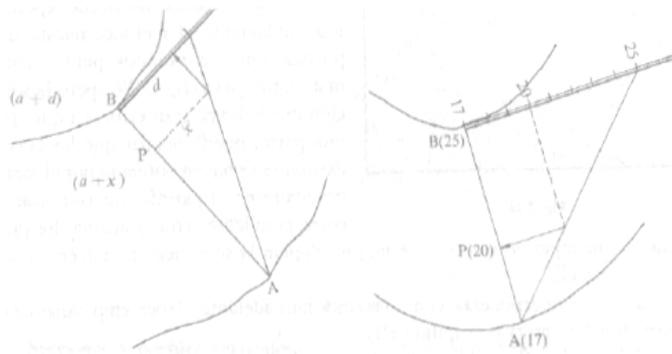


Figura 1.21: Interpolación de la altitud de un punto a partir del curvado

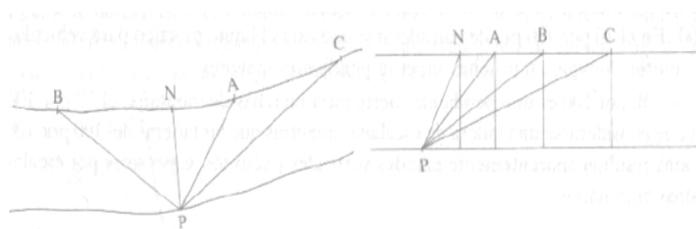


Figura 1.22: Pendientes del terreno derivadas de un curvado

#### 1.5.8.4. Obtención de un curvado

Realizado el levantamiento topográfico de la zona a cartografiar, dispondremos de la posición planimétrica y de la cota de una serie de puntos. A partir de estos datos es posible dibujar las curvas de nivel que representan el relieve del terreno. Los puntos obtenidos en el levantamiento no han de elegirse al azar sino que han de tener una localización y densidad tal que sean representativos del terreno. El dibujo de las curvas de nivel se hace partiendo del supuesto de que entre cada par de puntos la pendiente es constante. Alrededor de cada punto se van interpolando la o las curvas de nivel a partir de su cota y la de los puntos acotados que lo rodean. No tiene sentido el dibujar curvas de modo aislado. Hay que trabajar por zonas, identificando formas características de relieve. Es norma habitual el realizar un croquis, o dibujo a mano alzada, de las formas del relieve al mismo tiempo que se realiza el levantamiento topográfico, que sirve de apoyo para el dibujo de las curvas de nivel y para la detección de posibles errores.

La figura 1.23 ilustra la construcción manual de un curvado a partir de una malla regular de puntos acotados. En un levantamiento taquimétrico no se suele tomar una malla regular de puntos sino que se deben elegir el mínimo número de puntos que representen correctamente la superficie reglada.

Es muy conveniente acompañar en el levantamiento la anotación de los datos de cada punto con un código que ayude posteriormente a la realización del curvado. Esto se convierte en imprescindible con la utilización de los modernos programas informáticos que realizan modelos digitales del terreno. Estos programas permiten la definición de líneas de ruptura tales como divisorias, vaguadas, cabezas y pies de talud,... que tienen un tratamiento especial en el curvado.

En la actualidad la formación de curvados se realiza a través de programas informáticos que a partir de la nube de puntos, líneas de ruptura, ..., generan un modelo digital del terreno (MDT) como una malla de triángulos (TIN) con vértices en los puntos, y finalmente permiten obtener las curvas como intersección del MDT con los correspondientes planos con la equidistancia especificada. En la figura 1.24 se puede apreciar a la izquierda la nube de puntos y algunas líneas de ruptura, en el centro el TIN y a la derecha el curvado resultante.

En realidad el producto útil para abordar estudios de cubicación es el MDT. En la figura 1.25 se puede observar una vista perspectiva del MDT.

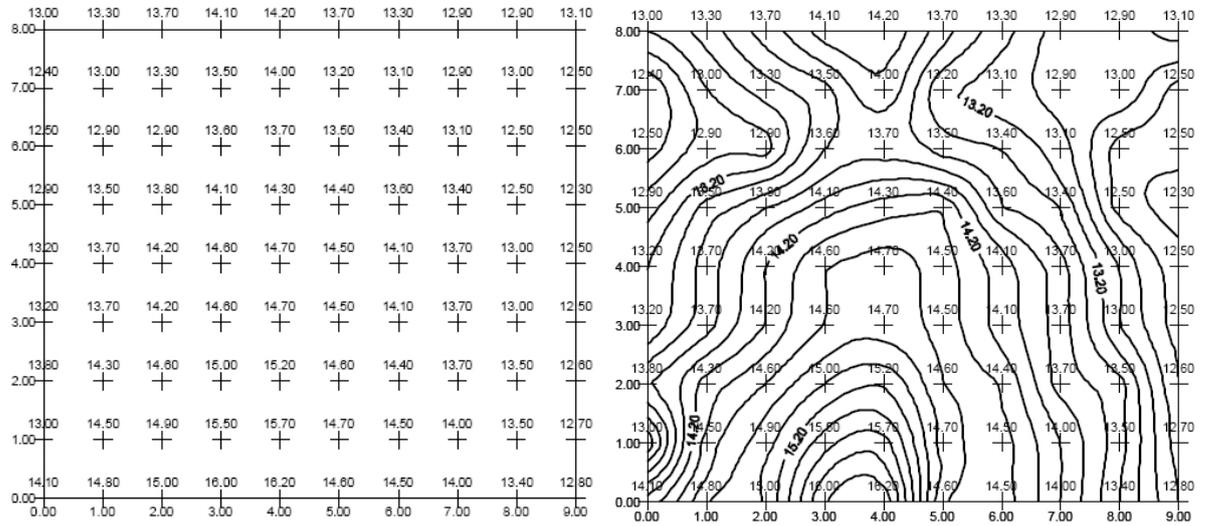


Figura 1.23: Obtención manual de un curvado

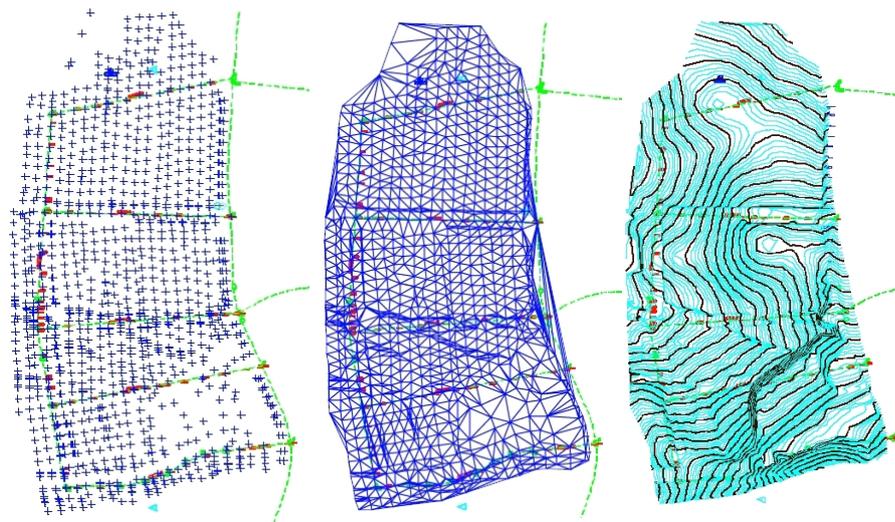


Figura 1.24: Proceso informático de obtención de un curvado

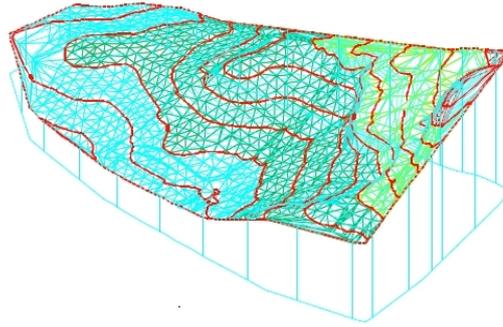


Figura 1.25: Visualización de un MDT en perspectiva

#### 1.5.8.5. Explotación de un curvado

Para el estudio de anteproyectos, análisis previos o de índole general de obras de ingeniería, se suele recurrir a captar información de cartografía existente, en una primera aproximación.

Para realizar el proyecto definitivo es necesario confeccionar la cartografía adecuada al mismo.

No hay que perder de vista que, aún en el anteproyecto existen unos márgenes de error y será preciso por tanto tener conocimiento de la calidad de la cartografía empleada.

Es muy frecuente hallar la intersección de la superficie topográfica con un plano o una superficie. Esta intersección se realiza uniendo los puntos de encuentro de las curvas de nivel, que proporciona la información altimétrica. Normalmente las secciones se practican con planos verticales, denominando perfil a la intersección obtenida. Los perfiles más utilizados en ingeniería son los longitudinales y los transversales.

Los perfiles longitudinales son la base de mediciones lineales y configuran la estructura del terreno a lo largo de la traza (intersección de la superficie topográfica con el plano vertical o con la superficie reglada que contiene a la alineación definitoria de la actuación). La idea del perfil longitudinal queda ilustrada en la figura 1.26.

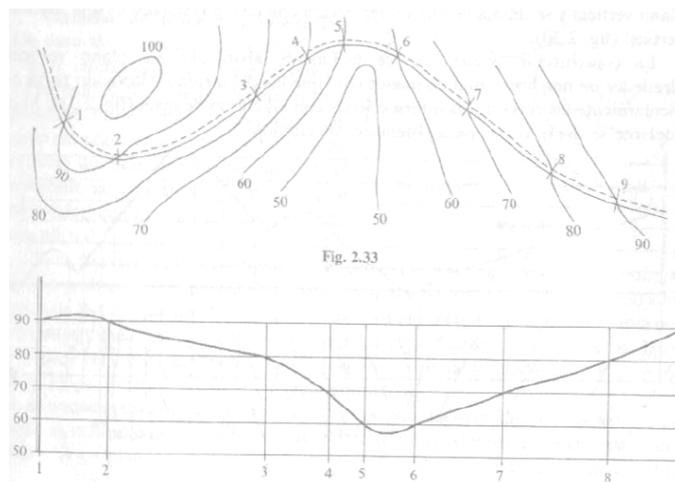


Figura 1.26: Concepto de perfil longitudinal

La información que proporciona el perfil longitudinal es de esencial trascendencia para el establecimiento de rasantes (eje de vía de comunicación, conducciones de cualquier tipo,...) o simplemente para analizar desniveles de puntos determinados para estudios tales como; zonas vistas y ocultas, tendidos aéreos,...

El perfil tiene una representación plana, un alzado, interviniendo dos escalas, figura 1.27:



- Cotas rojas o relación rasante - terreno, que suministra alturas de desmonte y terraplen.
- Distancias parciales y al origen de puntos característicos del eje.
- Perfiles transversales a realizar.

Los perfiles transversales son secciones producidas por planos verticales perpendiculares al eje que define la alineación, figura 1.28, y constituyen la base de las mediciones superficiales y volumétricas. Se dibujan con igual escala horizontal y vertical. Una escala frecuente en ingeniería es 1/100, aunque dependerá su elección de la finalidad del trabajo.

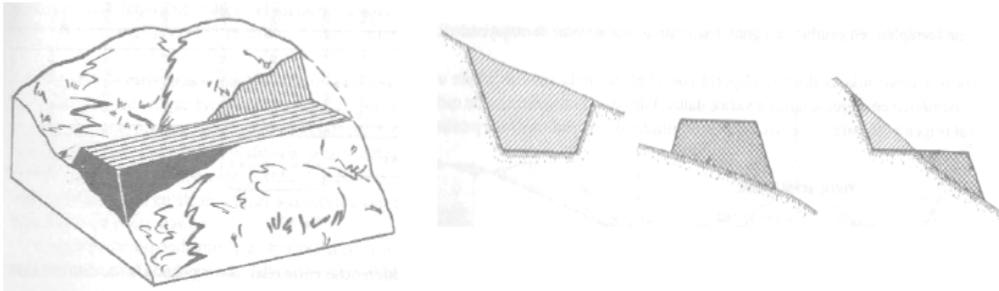


Figura 1.28: Concepto de perfil transversal

A partir del perfil longitudinal se define la ubicación de los perfiles transversales, siendo frecuente considerar en puntos singulares del eje y cada cierta distancia fija, 20 m. o 50 m., figura 1.29.

En la figura 1.30 se puede observar una secuencia de perfiles transversales de una obra lineal.

Obtenido el perfil trasversal del terreno se procede a dibujar sobre él la sección tipo; conocida la posición del eje de la rasante, la anchura de la rasante y las pendientes de talud y desmonte, figura 1.31. Con ello se consigue determinar los márgenes de actuación; cabeza de talud de desmonte y pie de talud de terraplen. Se procede también a medir las distintas superficies de desmonte y/o terraplen. Con todo esto se ha realizado el cajeo del perfil trasversal.

A lo largo de la ejecución de la obra se han de ir replanteando los elementos para ajustar el terreno a la obra proyectada, figura 1.32.

Calculadas las áreas de todas las secciones transversales se pueden evaluar los volúmenes de desmonte y terraplén. De esta forma se calcula el movimiento de tierras como la diferencia total entre volúmenes de terraplén y desmonte.

El cálculo exacto de los volúmenes de desmonte y terraplén entre dos transversales cajeados no entraña ninguna dificultad al ser un mero problema de geometría. Sin embargo, cuando se da una situación como la ilustrada en el tercer caso de la figura 1.33, puede resultar laborioso. Normalmente se recurre a fórmulas aproximadas, las que acompañan las ilustraciones en la figura 1.33. Para afianzar la licencia de aplicación de estas fórmulas podemos dar además dos motivos:

- La superficie reglada obtenida de un mapa topográfico curvado es de por sí una aproximación a la superficie topográfica real.
- Dada la gran cantidad de sucesión de pares de perfiles cajeados a cubicar, la probabilidad nos indica que los volúmenes de exceso y defecto fruto de la errónea aproximación han de tender a anularse.

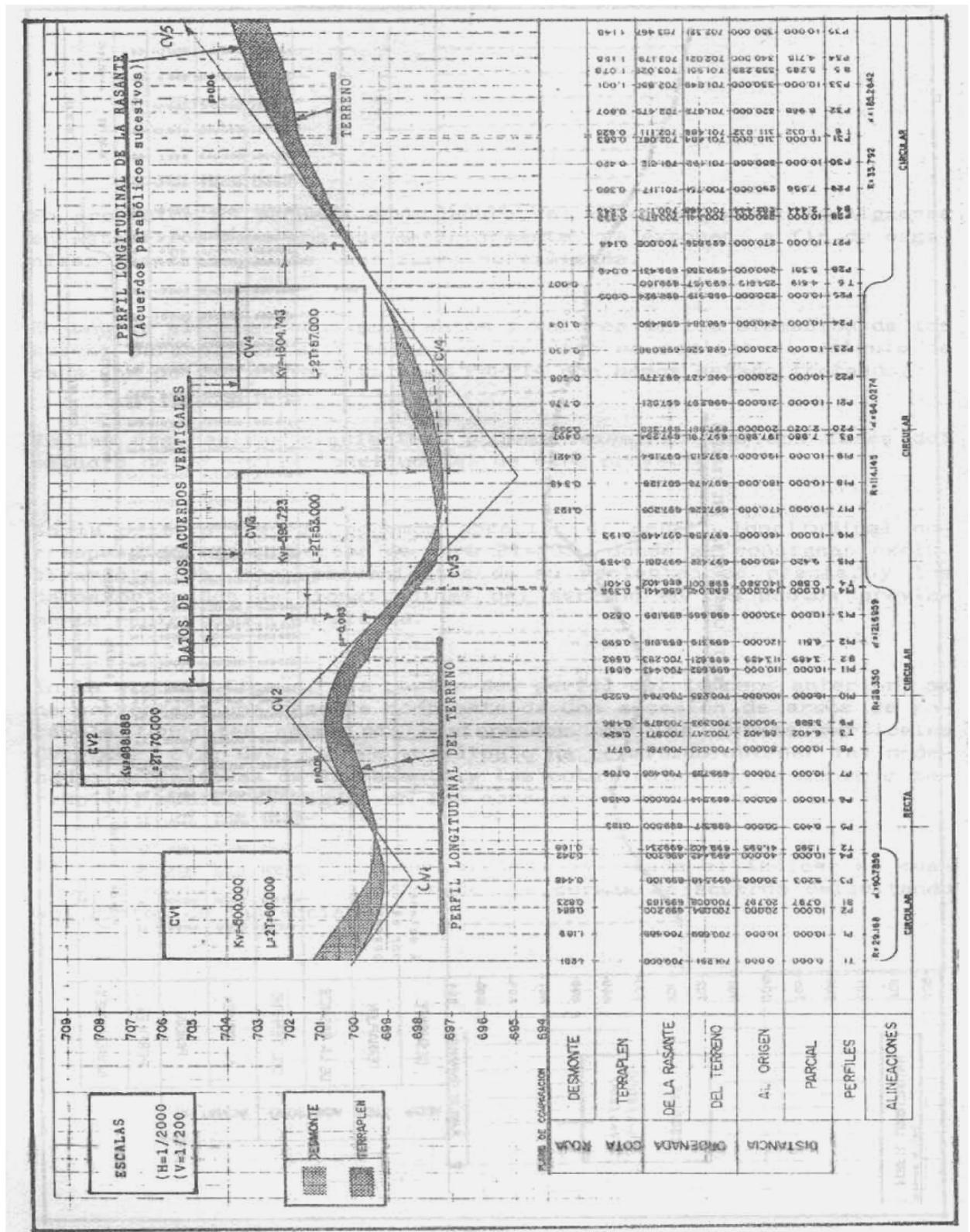


Figura 1.29: Perfil longitudinal de obra lineal

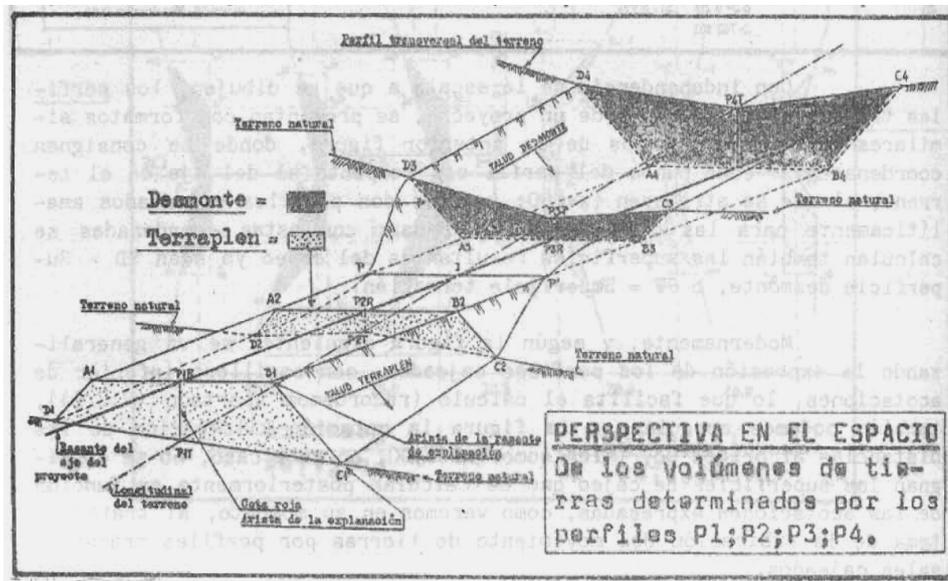


Figura 1.30: Secuencia de perfiles transversales

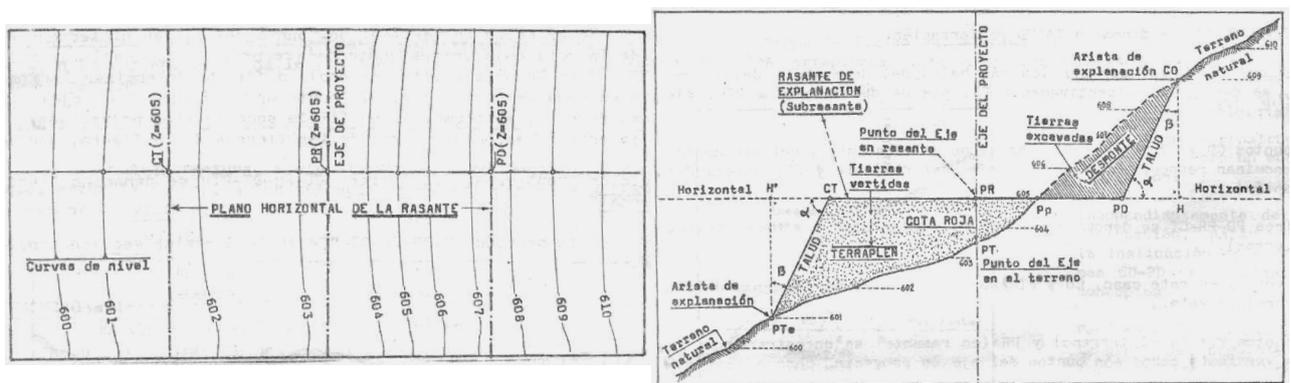


Figura 1.31: Vista en planta y alzado de un perfil transversal

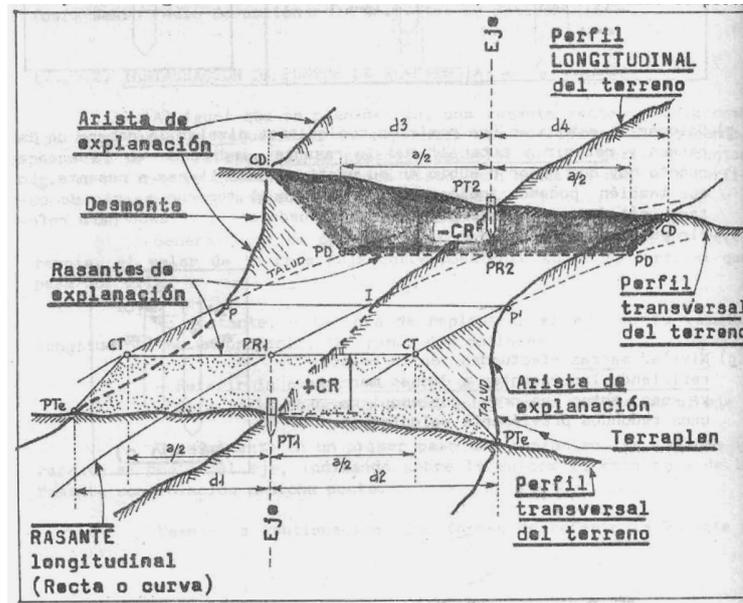


Figura 1.32: Geometría a replantear en obra lineal

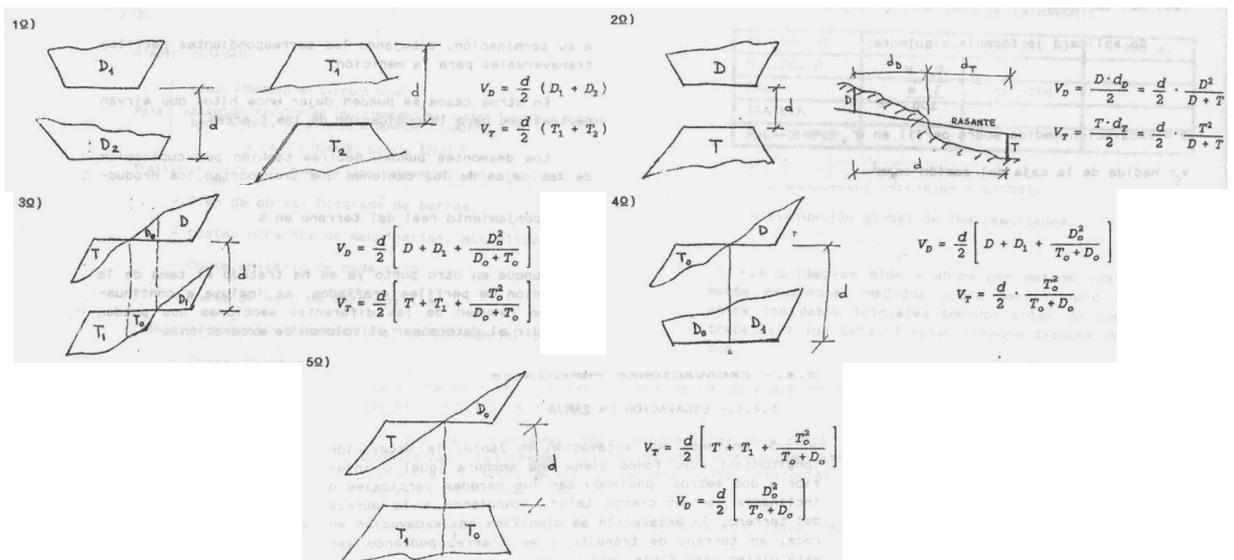


Figura 1.33: Cubicación por perfiles transversales

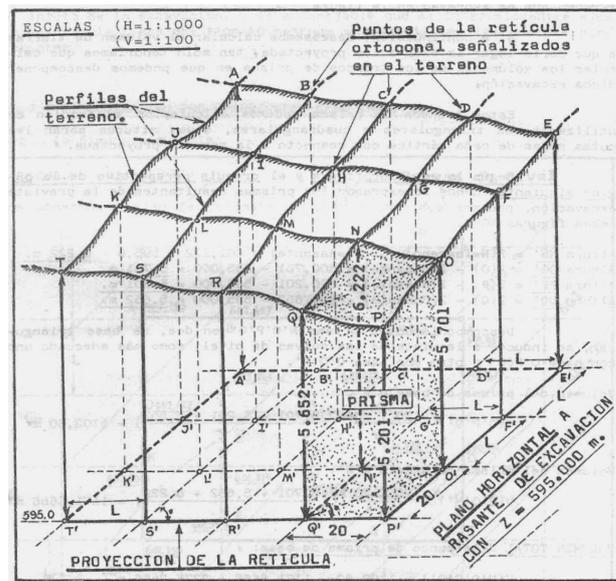


Figura 1.34: Cubicación por retícula

Cuando la zona a cubicar no presenta un carácter lineal se puede recurrir a otros métodos como la cubicación por retícula, figura 1.34.

Hay ocasiones, sin embargo, en que el cálculo riguroso de la cubicación es ineludible. Esto se produce cuando el material objeto del movimiento es de alta dureza y se precisa voladuras y altas compactaciones, siendo muy elevado el coste de la operación por metro cúbico.

Hoy día existen en el mercado gran cantidad de programas informáticos que trabajan con modelos digitales del terreno y tras la definición geométrica de la actuación permiten realizar todo tipo de operaciones, como la evaluación del movimiento de tierras. Incluso permiten proyectar directamente sobre el modelo digital. De esta forma se pueda optar por aquella solución que minimize el movimiento de tierras. Hay que tener presente que este es uno de los factores principales, aunque no el único.

Aquí se ha visto que es posible obtener los perfiles trasversales del terreno a partir de la cartografía existente para evaluar el movimiento de tierras. Se obtendrá una mejor aproximación a la realidad cuanto mejor sea la cartografía. Sin embargo, durante la ejecución de la obra, el equipo de topografía irá tomando en campo los perfiles trasversales del terreno para obtener mayor precisión y conseguir valoraciones parciales del trabajo realizado.

### 1.5.9. Distancia natural, reducida y geométrica. Superficie agraria y natural. Desnivel entre dos puntos

Debido a que en cartografía se utiliza el sistema de representación de planos acotados, proyección ortogonal, las distancias que se miden son las conocidas como reducidas y las superficies son las denominadas como superficies agrarias.

Dados dos puntos A y B de la superficie terrestre, y de acuerdo a la figura 1.35, se denomina distancia natural a la longitud más corta sobre la superficie terrestre entre ellos, distancia reducida,  $d_r$ , (distancia sobre el plano horizontal) y distancia geométrica,  $d_g$ , a la longitud del segmento que une los dos puntos.

La relación entre la distancia reducida y la geométrica viene dada por el ángulo de inclinación,  $\alpha$ , según

$$d_r = d_g \cos \alpha$$

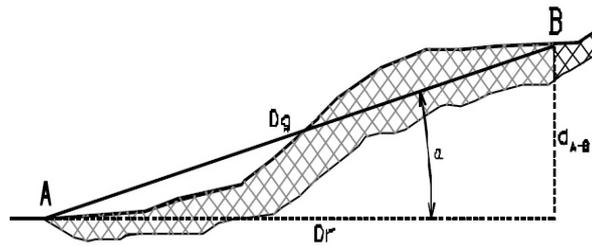


Figura 1.35: Distancia natural, geométrica y reducida

El desnivel entre los dos puntos,  $\Delta z_A^B$ , viene dado por

$$\Delta z_A^B = d_r \tan \alpha = d_r \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = d_g \sin \alpha$$

La pendiente de la recta de A a B en tanto por ciento se expresaría según

$$p_A^B (\%) = 100 \frac{\Delta z_A^B}{d_r}$$

Las superficies que se obtienen de medida directa o analítica sobre cartografía son las denominadas como superficies agrarias, proyectadas, y las superficies naturales, figura 1.36.

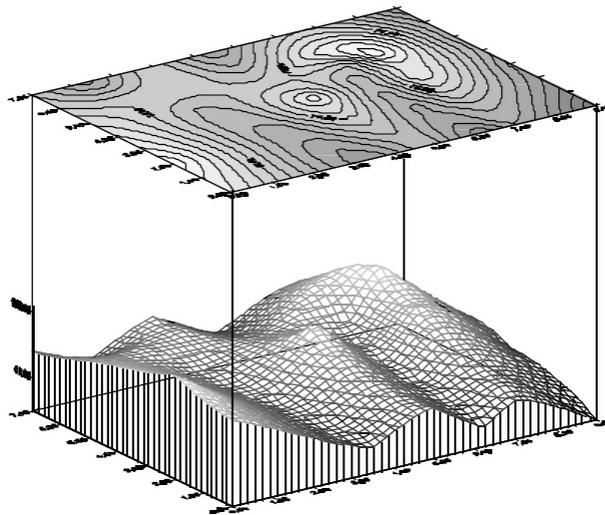


Figura 1.36: Superficie natural y proyectada

### 1.5.10. Magnitudes que se pueden medir sobre cartografía

Sobre una representación cartográfica se pueden medir elementos lineales, angulares, superficiales y desniveles.

Las mediciones se pueden realizar de forma directa o de forma analítica.

La medición analítica consiste en obtener la magnitud a partir de las coordenadas de los puntos que la definen.

La medición directa de distancias se realiza superponiendo una regla sobre la línea a medir y aplicando el factor de escala. La medición analítica de la distancia entre dos puntos A y B sobre una cartografía pasa por medir sus coordenadas, auxiliándose del reticulado de coordenadas, y aplicar la expresión siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} A \equiv (x_A, y_A) \\ B \equiv (x_B, y_B) \end{array} \right\} \rightarrow d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \quad (1.8)$$

La medición directa de ángulos se realiza superponiendo un semicírculo graduado y deduciendo el ángulo de la diferencia de lectura de las dos líneas que definen el ángulo. La medición analítica del ángulo definido por las rectas AC y AB pasa por obtener los acimutes de ambas rectas y deducir el ángulo de su diferencia:

$$\left. \begin{array}{l} A \equiv (x_A, y_A) \\ B \equiv (x_B, y_B) \\ C \equiv (x_C, y_C) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \theta_A^C = f(x_A, y_A, x_C, y_C) \\ \theta_A^B = f(x_A, y_A, x_B, y_B) \end{array} \rightarrow \widehat{BAC} = \theta_A^C - \theta_A^B \quad (1.9)$$

La medición directa de superficies se realiza con un instrumento denominado pantógrafo, figura 1.37, con el que se va recorriendo el perímetro de la zona y permite obtener la superficie correcta si se ha introducido la escala convenientemente.

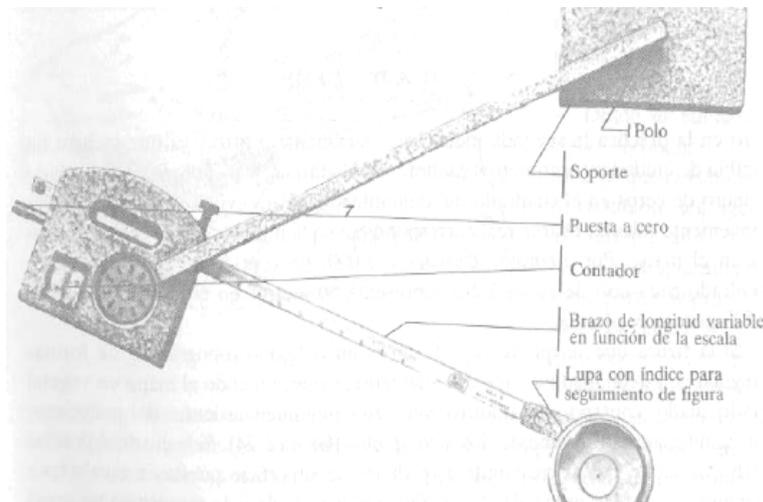


Figura 1.37: Pantógrafo analógico

Otra forma semi-analítica de medir la superficie consiste en dividir la superficie en triángulos, medir los lados de los triángulos,  $(a, b, c)$ , calcular la superficie de cada triángulo con la fórmula de Herón:

$$\begin{aligned} S_T &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ p &= \frac{1}{2}(a+b+c) \end{aligned} \quad (1.10)$$

y obtener la suma total como el sumatorio de los diferentes triángulos.

La medición analítica de una superficie pasa por obtener las coordenadas de los  $n$  vértices del polígono que define el perímetro y aplicar la siguiente expresión:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} [(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} + y_i)] \quad \text{con } i+1 = 1 \text{ para } i = n \quad (1.11)$$

La medición directa de un desnivel entre dos puntos pasa por interpolar sus altitudes y obtener la diferencia.

La medición directa de pendientes se obtiene de la relación entre la medida del desnivel y la distancia.

En la actualidad existen un gran número de programas informáticos que permiten realizar las mediciones de forma analítica, ya sea sobre cartografía en formato imagen o vectorial.

## 1.6. Conceptos básicos de geodesia

### 1.6.1. Definición de geodesia

Geodesia es la ciencia que estudia la figura y el campo gravitacional exterior de la Tierra. Por figura entendemos la forma y dimensiones. El problema de la geodesia implica una formulación geométrica ( forma de la Tierra ) y una física ( campo de gravedad ). El motivo no es sino que la de la Tierra es la respuesta al conjunto de fuerzas que actúan sobre ella.

Hasta no hace mucho se aceptaba en la comunidad científica una división de la geodesia en:

- Geodesia geométrica, siendo su objetivo la formulación geométrica.
- Geodesia física, siendo su objetivo la formulación física.

Hoy día se tiende a considerar ambas formulaciones inseparables dado que están íntimamente ligadas.

El problema del estudio de la figura de la Tierra se reduce a la determinación de las coordenadas de los puntos de su superficie en un sistema de referencia único, general para toda la Tierra.

El problema del estudio del campo gravitacional terrestre se reduce a la determinación del potencial de la fuerza de la gravedad sobre la superficie terrestre y en su espacio exterior, en el mismo sistema de referencia que se estudia la figura de la Tierra.

En cualquier trabajo geodésico será imprescindible tener definido el sistema de referencia en el que se va a trabajar. En la definición del sistema de referencia cobra un papel fundamental la superficie de referencia del mismo. Tres son las superficies de referencia que se han venido empleando: elipsoide de revolución, esfera y plano, figura 1.38.

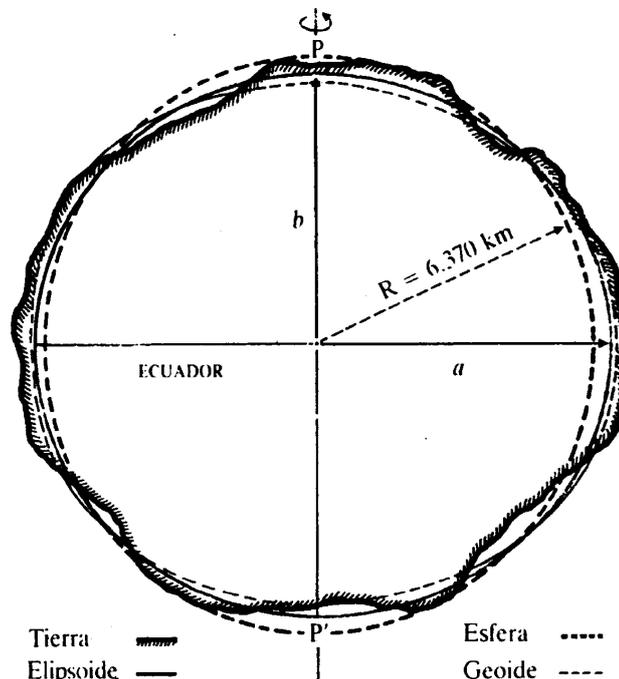


Figura 1.38: Esfera, elipsoide y geoide

En un capítulo posterior se incluyen los diferentes sistemas de referencia geodésicos empleados en la actualidad en España y se describen las superficies de referencia incluidos en los mismos.

En la sección 1.5.2 se describe la evolución en el tiempo en la teoría acerca de la forma que se ha considerado para la Tierra.

La superficie física de la Tierra es la frontera entre las masas sólidas y las líquidas o gaseosas.

La Tierra tiene una complicada definición geométrica, siendo necesario definir una superficie de referencia. Se define el geoide como una superficie equipotencial, lugar geométrico de los puntos que están en equilibrio por la actuación de las siguientes solicitaciones:

- Fuerzas de atracción newtoniana entre las partículas que conforman la masa terrestre.
- Fuerza centrífuga debida a la rotación terrestre
- Fuerza de atracción de los demás astros. Mucho menos importante que las dos anteriores en la fuerza resultante global.

Estudiando estas fuerzas y los potenciales que provocan se puede definir física y geométrica-mente la figura del geoide, que es asimilable a prolongar la superficie de los mares en calma ( fluido en equilibrio respecto de las fuerzas solicitantes ) por debajo de los continentes. Sin embargo, el geoide no coincide con exactitud con la superficie real del mar, dado que los océanos están sujetos a mareas y corrientes. Por esta razón para definir el geoide se utiliza el concepto de nivel medio del mar, figura 1.39.

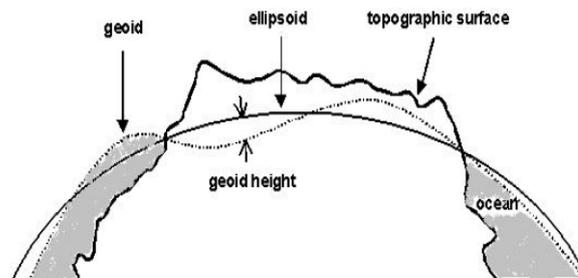


Figura 1.39: Geoide como aproximación al nivel medio del mar

Un mareógrafo, figura 1.40, es un instrumento que permite medir la variación de la altitud del nivel del mar. La definición de un nivel medio del mar se traduce en la asignación de una altitud media a una señal de nivelación materializada en las inmediaciones del mismo. La materialización física del geoide en el sistema de altitudes ortométricas empleadas en España se realizó mediante mediciones entre 1870 y 1872 en el mareógrafo de Alicante. El origen de la Red de Nivelación de Alta Precisión española es el clavo de nivelación ubicado en el Ayuntamiento de Alicante, con altitud de 3,4085 *m.* sobre el nivel medio del mar en Alicante.

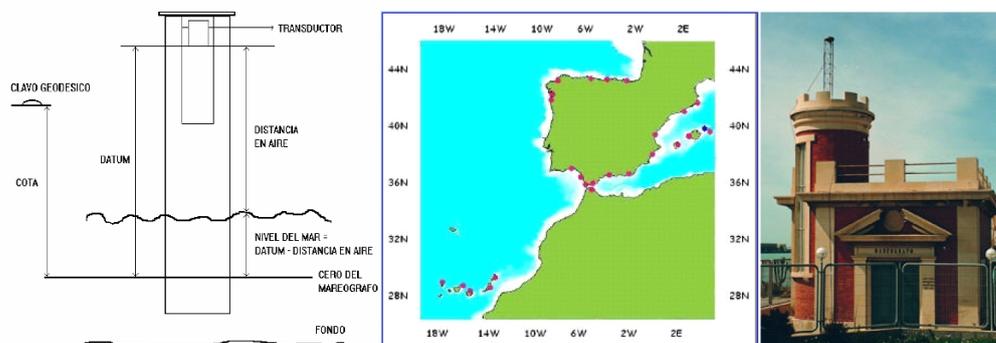


Figura 1.40: Concepto de mareógrafo. REDMAR, Red de Mareógrafos de Puertos del Estado.

Dado que el geoide es una superficie equipotencial respecto del potencial gravitatorio y el vector fuerza de la gravedad es el gradiente del mismo, la dirección del vector gravedad será perpendicular al geoide en cualquiera de sus puntos. La dirección del vector de la gravedad en un punto de la superficie terrestre coincide con la línea de la plomada, figura 1.41.

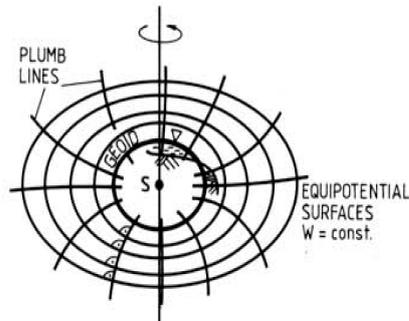


Figura 1.41: Curvatura de la línea de la plomada

### 1.6.2. Relación entre topografía y geodesia

No cabe duda de que la ciencia geodésica y la técnica topográfica tienen objetivos comunes en parte: determinación de forma y dimensiones de la superficie terrestre y posibilidad de representación cartográfica de la misma sobre un plano. Es difícil establecer una separación concisa. La geodesia empieza allí donde termina la topografía, pero no pueden separarse ya que la topografía necesita apoyarse en la geodesia en la mayor parte de los casos.

La frontera de la separación entre geodesia y topografía se ha establecido tradicionalmente en función de la extensión de la zona objeto de trabajo. Cuando se trabaja en un marco territorial reducido la falta de planeidad terrestre es lo suficientemente pequeña como para que pueda despreciarse, con ciertas limitaciones que hay que tener siempre presente. Esta división tenía sentido cuando el instrumental utilizado en la observación era el clásico de medición angular y de distancias. Sin embargo, recientemente esta frontera se ha difuminado al convertirse el instrumental y la metodología GPS, basado en técnicas de geodesia espacial, en una herramienta imprescindible en topografía.

### 1.6.3. La gravedad terrestre y el potencial gravitatorio

Es conocido desde muy antiguo la preocupación del hombre por explicar el movimiento de la caída de los cuerpos, siendo Aristóteles en el siglo IV a.C., el primero que sistematiza la respuesta a este problema. La teoría aristotélica según la cual el centro de la Tierra es el lugar natural de todos los cuerpos, perdura hasta el siglo XVII, en que Galileo obtiene experimentalmente el valor de la gravedad y Newton formula la Ley de la Gravitación Universal, según la cual dos cuerpos se atraen con una fuerza proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Todos los cuerpos situados en la superficie terrestre, conjuntamente con esta fuerza de atracción, se encuentran sometidos a una fuerza centrífuga por efecto de la rotación terrestre. La composición entre estas dos fuerzas es lo que conviene en denominarse fuerza de gravedad.

La Gravimetría se puede definir como la ciencia cuyo objetivo es determinar y estudiar el campo gravitatorio terrestre y de otros cuerpos celestes en función de la posición y el tiempo mediante medidas de gravedad y gradiente de gravedad realizados sobre o cerca de la superficie del cuerpo, así como sus consecuencias sobre la Tierra o ese cuerpo.

En un sistema en rotación la aceleración de la gravedad,  $\bar{g}$ , que actúa sobre la unidad de masa está compuesta por la atracción newtoniana,  $\bar{f}$ , y por la aceleración centrífuga,  $\bar{q}$ ,

$$\bar{g} = \bar{f} + \bar{q} \quad (1.12)$$

tal y como ilustra la figura 1.42.

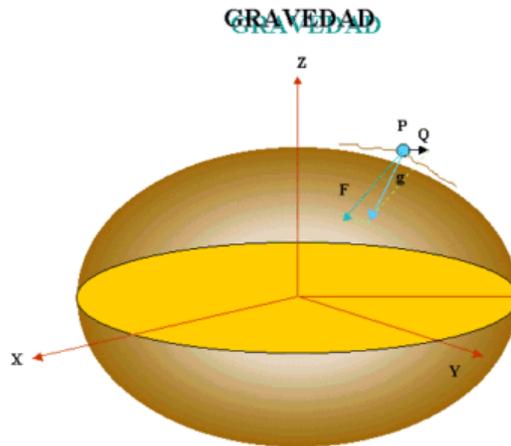


Figura 1.42: Fuerzas del campo gravitatorio terrestre

La fuerza de la gravedad se obtiene escalando la aceleración de la gravedad con la masa del cuerpo atraído,

$$\vec{G} = m\vec{g} \quad (1.13)$$

La unidad del SI para la aceleración de la gravedad es  $m s^{-2}$ . Tradicionalmente  $g$  ha sido medida en GAL (en honor a Galileo Galilei) y miliGAL, siendo su equivalente:  $gal = 1cm s^{-2}$ . El valor medio para la aceleración de la gravedad es de  $9,8 m s^{-2}$ , sin embargo, tal y como será justificado, es función de la latitud y aumenta del ecuador a los polos, adoptando valores de aproximadamente  $9,7303 m s^{-2}$  a  $9,8322 m s^{-2}$ , respectivamente.

Para la representación global del campo gravitatorio se considera un sistema de referencia geocéntrico fijado en la Tierra, figura 1.43.

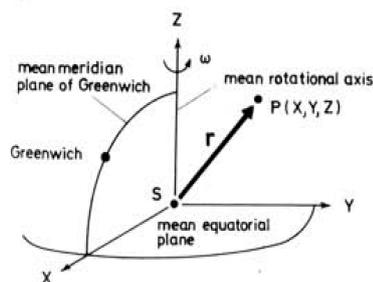


Figura 1.43: Sistema de referencia geocéntrico

La gravedad es una de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza, junto al electromagnetismo, la interacción nuclear fuerte y la interacción nuclear débil. A diferencia de las interacciones nucleares y a semejanza del electromagnetismo, actúa a grandes distancias. Sin embargo, al contrario que el electromagnetismo, la gravedad siempre es una fuerza de tipo atractiva. Este es el motivo de que la gravedad sea la fuerza más importante a la hora de explicar los movimientos a gran escala en todo el Universo y hace, por ejemplo, que los planetas del Sistema Solar sigan órbitas predeterminadas alrededor del Sol.

Isaac Newton fue la primera persona en darse cuenta de que la fuerza que hace que los objetos caigan con aceleración constante en la Tierra y la fuerza que mantiene en movimiento los planetas

y las estrellas es la misma, y a él se debe la primera teoría general de la gravitación, expuesta en su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

La Ley de la Gravitación Universal de Newton establece que la fuerza que ejerce una partícula puntual con masa  $m_1$  sobre otra con masa  $m_2$  es directamente proporcional al producto de las masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa:

$$\vec{f} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r} \quad (1.14)$$

siendo  $\vec{r}$  el vector que une las dos partículas,

$$\vec{r} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \quad (1.15)$$

$r$  la norma del vector,

$$r = \|\vec{r}\| = \left( (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.16)$$

y  $G$  la constante de gravitación universal,

$$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (1.17)$$

Las componentes del vector,  $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ , son:

$$f_1 = \vec{f} \frac{x_2 - x_1}{r} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} (x_2 - x_1) \quad (1.18)$$

$$f_2 = \vec{f} \frac{y_2 - y_1}{r} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} (y_2 - y_1) \quad (1.19)$$

$$f_3 = \vec{f} \frac{z_2 - z_1}{r} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} (z_2 - z_1) \quad (1.20)$$

Según las leyes de Newton, toda fuerza ejercida sobre un cuerpo le imprime una aceleración. En presencia de un campo gravitatorio, todo cuerpo se ve sometido a la fuerza de la gravedad, y la aceleración que imprime esta fuerza, o aceleración en cada punto del campo, se denomina intensidad del campo gravitatorio.

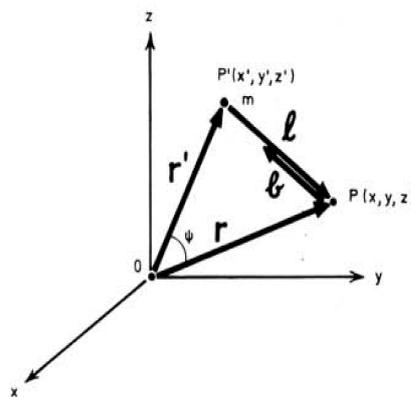


Figura 1.44: Atracción de puntos de la Tierra

La atracción sobre un punto  $P$  de la superficie terrestre es la resultante de la composición de la atracción de todos los puntos de la Tierra, figura 1.44, obteniéndose según

$$\vec{f}(\vec{r}) = G \iiint_{Tierra} \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{\|\vec{r}' - \vec{r}\|^3} dm \quad (1.21)$$

donde  $\vec{r}'$  y  $\vec{r}$  son los vectores geocéntricos del punto origen de la fuerza  $P'$  ( elemento de masa  $dm$ ) y el punto considerado sobre la superficie terrestre  $P$  ( con unidad de masa,  $m = 1$  ), respectivamente. El elemento diferencial de masa,  $dm$ , se puede expresar en función de la densidad y el diferencial de volumen,

$$dm = \rho dv \quad (1.22)$$

La aceleración centrífuga de un punto de la Tierra se obtiene a partir del vector de rotación terrestre  $\vec{\omega}$  y por la distancia  $d$  del punto al eje de rotación,

$$\vec{q}(\vec{r}) = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega} = \omega^2 \vec{d} \quad (1.23)$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular de rotación terrestre,

$$\omega = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad } s^{-1} = 2,0055 \pi \text{ día} \quad (1.24)$$

Las componentes del vector  $\vec{q}(\vec{r}) = (q_1, q_2, q_3)$  en el sistema de referencia geocéntrico con el eje  $z$  coincidente con el eje de rotación terrestre son

$$q_1 = \omega^2 x, \quad q_2 = \omega^2 y, \quad q_3 = 0 \quad (1.25)$$

Se puede comprobar que los dos campos de fuerzas derivan de los correspondientes campos escalares,

$$\vec{f} = \text{grad } V, \quad \vec{q} = \text{grad } Q \quad (1.26)$$

siendo  $V$  el potencial de atracción newtoniana y  $Q$  el potencial de fuerza centrífuga.

Demostrar que el campo de fuerzas de atracción newtoniana deriva de un potencial es muy sencillo. Partiendo de la expresión del potencial

$$V = G \frac{m}{r} \quad (1.27)$$

y calculando su gradiente

$$\text{grad } V = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = -G \frac{m}{r^2} \frac{dx}{dr} \\ \frac{\partial V}{\partial y} = -G \frac{m}{r^2} \frac{dy}{dr} \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -G \frac{m}{r^2} \frac{dz}{dr} \end{cases} \quad (1.28)$$

utilizando el hecho de que de la expresión 1.16 se deducen las derivadas

$$\begin{aligned} 2rdr &= 2(x_2 - x_1) dx \rightarrow \frac{dr}{dx} = \frac{x_2 - x_1}{r} \\ 2rdr &= 2(y_2 - y_1) dy \rightarrow \frac{dr}{dy} = \frac{y_2 - y_1}{r} \\ 2rdr &= 2(z_2 - z_1) dz \rightarrow \frac{dr}{dz} = \frac{z_2 - z_1}{r} \end{aligned} \quad (1.29)$$

y se obtiene

$$\text{grad } V = \left( -G \frac{m}{r^3} (x_2 - x_1), -G \frac{m}{r^3} (y_2 - y_1), -G \frac{m}{r^3} (z_2 - z_1) \right) = \vec{f} \quad (1.30)$$

lo que demuestra que el campo de fuerzas de atracción newtoniana deriva del potencial de atracción newtoniana de expresión 1.27. Extendido a la totalidad de la tierra, este potencial adopta la

expresión

$$V = G \iiint_{Tierra} \frac{dm}{r}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} V = 0 \quad (1.31)$$

De igual forma, para el campo de fuerzas centrífugo, partiendo de la expresión

$$Q = \frac{\varpi^2}{2} (x^2 + y^2), \quad \lim_{d \rightarrow 0} Q = 0 \quad (1.32)$$

se obtiene su gradiente

$$\text{grad } Q = \left( \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = \varpi^2 x \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = \varpi^2 y \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (1.33)$$

con lo que se demuestra que la fuerza centrífuga de rotación terrestre deriva del potencial centrífugo que responde a la expresión 1.32.

Dado que el campo de fuerzas de la gravedad terrestre es la composición del campo de fuerzas de atracción newtoniana y del campo de fuerzas centrífugas, y debido a que ambos campos de fuerzas derivan de un potencial, se deduce que el campo de fuerzas de la gravedad terrestre deriva de un potencial al que se denomina potencial gravitatorio,

$$W = V + Q = G \iiint_{Tierra} \frac{dm}{r} + \frac{\varpi^2}{2} (x^2 + y^2) \quad (1.34)$$

El achatamiento polar de la Tierra se debe a que la fuerza centrífuga actúa contrarestando a la fuerza de atracción newtoniana y a que el valor de la fuerza centrífuga es máximo en el ecuador y mínimo en los polos, figura 1.34. En la siguiente sección se estudia la forma de la Tierra a partir del estudio de la geometría del campo gravitatorio terrestre.

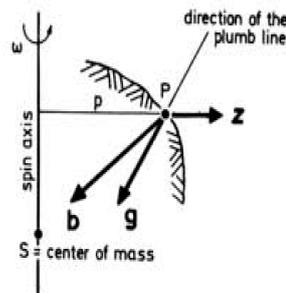


Figura 1.45: Fuerza resultante de la composición de la fuerza de atracción newtoniana y de la fuerza centrífuga

#### 1.6.4. Geometría del campo gravitatorio terrestre. El geoide

La geometría de un campo de fuerzas que deriva de un potencial se traslada al estudio de la geometría de las superficies equipotenciales del potencial del que deriva.

Se define superficie equipotencial de un campo escalar como la región para la cual el potencial adopta un determinado valor.

Las superficies equipotenciales del potencial de atracción newtoniana generado por un cuerpo puntual son la superficie de esferas centradas en ese cuerpo. El gradiente en cada punto es un vector normal a las superficies equipotenciales, resultando un vector dirigido hacia el cuerpo y con norma menor a medida que se considere un punto más alejado.

Las superficies equipotenciales del potencial centrífugo son cilindros con generatriz coincidente con el eje de rotación. El gradiente en cada punto es un vector hacia la generatriz contenido en un plano normal a la generatriz y cuya norma decrece a medida que el punto considerado se aleja del eje de rotación.

Los efectos del campo de atracción newtoniana y de la fuerza centrífuga que genera la rotación terrestre son los principales responsables de la figura matemática de la Tierra, del movimiento libre de los cuerpos y de la distribución de fluidos sobre la superficie terrestre. La determinación de la figura matemática de la Tierra presenta una íntima relación con la definición de superficies de referencia. El movimiento libre de los cuerpos está unido al concepto de vertical y la distribución de fluidos con el concepto de horizonte. Por todo ello, un sistema de coordenadas natural es el definido por las superficies de nivel y las líneas de la plomada, junto con superficies de referencia como el geoide.

Las superficies  $W(x, y, z) = \text{cte.}$ , donde  $W$  representa al potencial gravitatorio, se denominan *superficies equipotenciales* o *superficies de nivel de la gravedad*. Son superficies cerradas sin rupturas ni aristas.

El geoide se ha escogido como la superficie equipotencial que corresponde al nivel medio del mar dado que ésta es una superficie con realidad física suficiente, es decir, es tangible, metrizable, reconocible. Se acostumbra a expresar la ecuación del geoide como  $W(x, y, z) = W_0$ .

El geoide, tal como se ha definido, estará unas veces en el exterior del cuerpo terrestre y otras en su interior. Será, por tanto, una superficie continua y lisa, pero con discontinuidades en su curvatura, no constituyendo una función analítica.

Una superficie de nivel así definida constituye una buena aproximación a la *figura matemática* de la Tierra, pero dada su complejidad no constituye una buena elección como superficie de referencia planimétrica. En cambio es la superficie más adecuada para referir los distintos potenciales o altitudes sobre ella.

Derivando la función potencial de gravedad se obtiene,

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz = \nabla W \overline{ds} = \overline{g} \overline{ds} \quad (1.35)$$

con

$$\overline{ds} = (dx, dy, dz)$$

que representa la variación de potencial en un punto, en función del valor de la gravedad en el punto,  $\overline{g}$ , y de la dirección considerada,  $\overline{ds}$ . En particular, tomando  $\overline{ds}$  a lo largo de una superficie equipotencial, en que  $W$  permanece constante,  $dW = 0$ , resultando la ecuación

$$\overline{g} \overline{ds} = 0 \quad (1.36)$$

que expresa el hecho ya conocido de que el vector gravedad en un punto es normal a la superficie equipotencial que transcurre por dicho punto, como gradiente que es del potencial gravitatorio.

La superficie equipotencial representa el horizonte físico y el vector gravedad define la vertical física, línea de la plomada o línea de fuerza, como se ilustra en la figura 1.41.

Adoptando un sistema cartesiano local, figura 1.46, con origen en el punto  $P$  considerado, de forma que el eje  $z$  tenga la dirección de un vector unitario  $\vec{n}$ , con igual dirección que  $\vec{g}$  en  $P$  pero de sentido contrario, y los ejes  $x$  e  $y$  sean perpendiculares entre sí y tangentes ambos a la superficie equipotencial en  $P$ , resulta,

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial z} = -g \quad (1.37)$$

que de nuevo expresa que la máxima variación de potencial se produce siempre en la dirección perpendicular a la superficie equipotencial.

La trayectoria seguida por una partícula material en caída libre es siempre perpendicular a las superficies equipotenciales que atraviesa. Definimos la dirección de la línea de la plomada en un

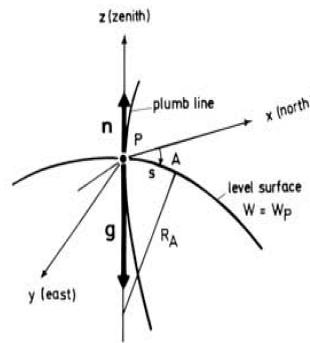


Figura 1.46: Sistema astronómico local

punto como aquella normal a la superficie equipotencial de la gravedad que pasa por el punto. La línea de la plomada no es recta sino curva debido a que las superficies equipotenciales de la gravedad no son paralelas. La distancia recorrida, o altitud, se obtiene integrando  $dz = -\frac{dW}{g}$  a lo largo de la trayectoria,

$$H = - \int_{P_0}^P \frac{dW}{g} \tag{1.38}$$

La longitud resultante recibe el nombre de altitud ortométrica y representa la distancia, medida a lo largo de la línea de fuerza, que separa un punto  $P$  de su proyección  $P_0$  sobre la superficie equipotencial de referencia o geoides. Diferenciando en la expresión 1.38 se obtiene,

$$dW = -gdH \tag{1.39}$$

que relaciona la variación en potencial con la variación en altitud ortométrica a partir del valor de la gravedad.

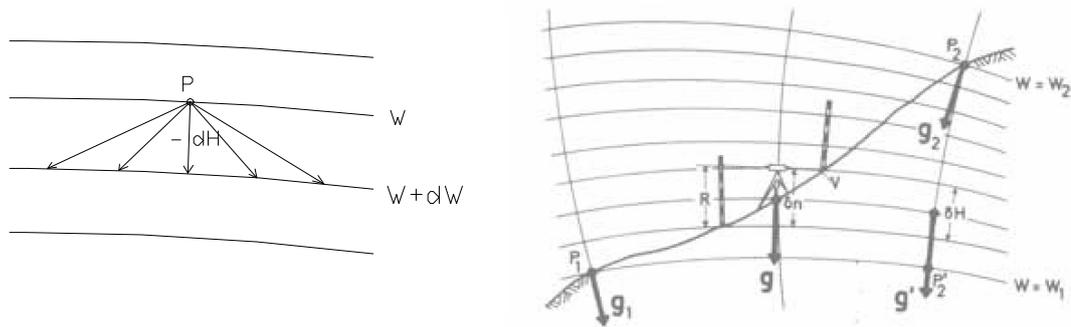


Figura 1.47: Relación entre altitud ortométrica y variación del potencial

El concepto de altitud está relacionado con el camino de mínima energía, figura 1.47.

### 1.6.5. Coordenadas astronómicas

Una vez que se han introducido los conceptos de eje de rotación terrestre y vector de la gravedad ya se pueden definir las coordenadas astronómicas.

Considérese el sistema de coordenadas de la figura 1.47 definido de acuerdo a:

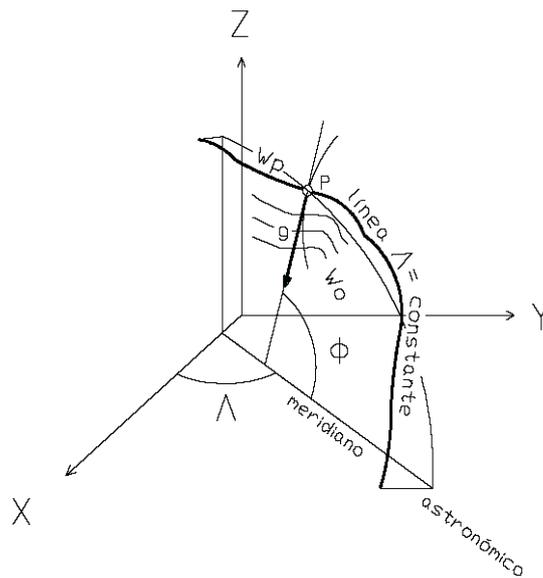


Figura 1.48: Coordenadas astronómicas

- El origen coincide con el centro de masas de la Tierra
- El eje  $Z$  coincide con el eje medio de rotación terrestre (CTP, Polo Convencional Terrestre), de manera que el plano  $Z = 0$ , conocido como plano ecuatorial astronómico, es ortogonal a dicho eje. El eje  $Z$  intersecta a la superficie de la Tierra en los polos astronómicos. El plano ecuatorial astronómico intersecta con la superficie de la Tierra en el ecuador astronómico y divide a la superficie terrestre en dos hemisferios, norte y sur, según contengan al polo norte o sur, respectivamente, tal y como se observa en la figura 1.49.
- El plano  $Y = 0$  está definido de manera que contiene al eje de rotación terrestre y al meridiano medio de Greenwich, también denominado Observatorio Medio de Greenwich (GMO) y la orientación del eje  $X$  es tal que la coordenada del GMO es positiva. Éste plano es el plano origen de longitud, intersecta a la superficie de la Tierra en el meridiano origen y divide a la superficie terrestre en dos hemisferios, el occidental y el oriental, al oeste y este del mismo, respectivamente, tal y como se observa en la figura 1.49.

Para cada punto  $P$  de la superficie terrestre, a partir de la dirección del vector de la gravedad,  $\bar{g}$ , se definen:

- Vertical astronómica.- Recta que contiene al punto y sigue la dirección del vector de la gravedad. Sobre esta recta se acostumbra a denominar dirección cenital al sentido hacia el exterior de la Tierra y nadir al sentido hacia el interior.
- Latitud astronómica,  $\Phi$ .- Es el ángulo que forma la vertical astronómica con el plano ecuatorial astronómico. Se mide de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  en el hemisferio norte y de  $0^\circ$  a  $-90^\circ$  en el hemisferio sur.
- Plano meridiano astronómico del punto.- Es el plano que pasa por el punto y contiene a la vertical astronómica y a una paralela al eje de rotación terrestre.
- Longitud astronómica,  $\Lambda$ .- Es el ángulo que forma el plano meridiano del punto y el plano meridiano origen. Se mide de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  hacia el hemisferio oriental y de  $0^\circ$  a  $-180^\circ$  en el hemisferio occidental.
- Plano horizonte astronómico.- Plano perpendicular a la vertical astronómica en dicho punto.
- Meridiana astronómica del punto.- Es la intersección de los planos meridiano astronómico y horizonte astronómico del punto.

- Plano vertical astronómico y acimut astronómico de una dirección.- Para cada dirección observada desde un punto existe un plano que contiene a la vertical astronómica del punto de vista y a la dirección observada, este plano se denomina vertical astronómico. Cada plano vertical astronómico queda caracterizado por formar un ángulo con el plano meridiano origen, el acimut astronómico. El acimut astronómico se mide con origen en el sur y sentido positivo el horario, de manera que las cuatro direcciones cardinales tienen por acimut astronómico:
  - Sur.- acimut astronómico  $0^\circ$
  - Oeste.- acimut astronómico  $90^\circ$
  - Norte.- acimut astronómico  $180^\circ$
  - Este.- acimut astronómico  $270^\circ$

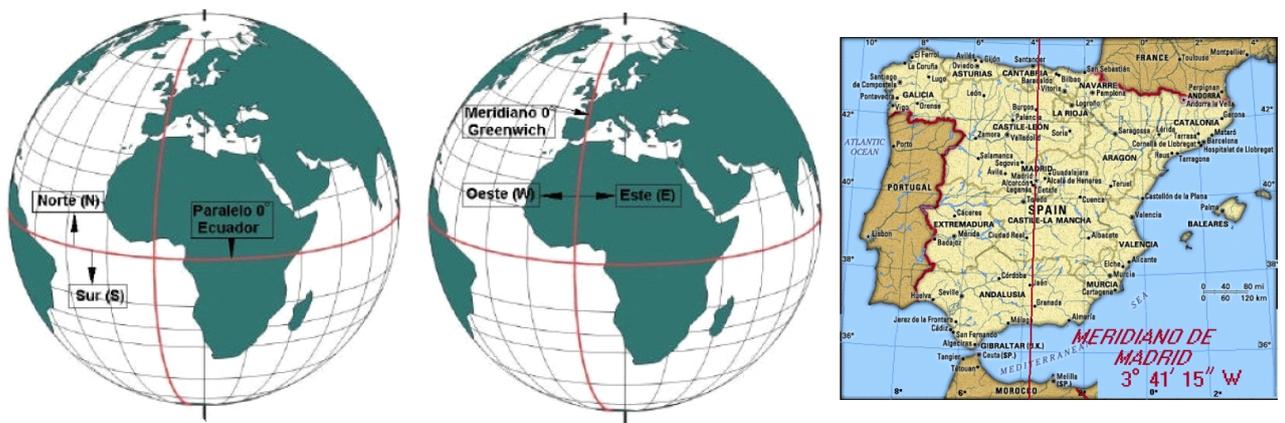


Figura 1.49: Elementos de referenciación geográfica

El conjunto de los puntos que cumplen  $\Phi = cte$  pertenecen a una superficie. Lo mismo ocurre con el conjunto de puntos que satisfacen  $\Lambda = cte$ . La situación en el espacio de un punto inmerso en el campo gravitatorio de la Tierra queda por tanto definido por las intersección de las tres superficies:

$$\Phi = cte, \Lambda = cte, W = cte$$

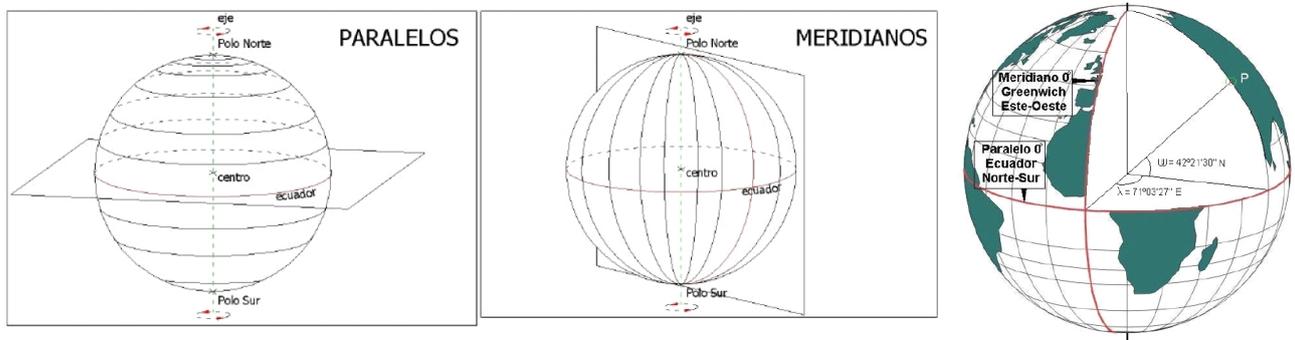


Figura 1.50: Paralelos y meridianos, coordenadas geográficas

La geometría en que se conservan las coordenadas astronómicas sería muy sencilla si el geoide fuera una esfera achatada por los polos, figura 1.50:

- Todos los puntos con igual latitud astronómica definirían un plano paralelo astronómico, paralelo al plano ecuatorial astronómicos, que intersectaría a una esfera con origen en el centro de masas terrestre en una circunferencia denominada paralelo astronómico.
- Todos los puntos con igual longitud astronómica definirían un plano meridiano astronómico, paralelo al plano meridiano origen, que intersectaría a una esfera con origen en el centro de masas terrestre en una circunferencia denominándose a la mitad que va de polo a polo y contiene al punto como meridiano astronómico.

La figura 1.51 resume los elementos de georeferenciación estudiados.

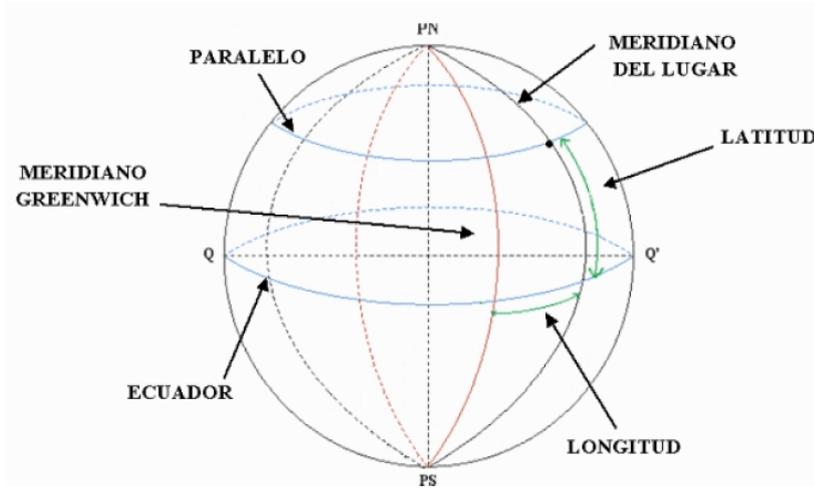


Figura 1.51: Resumen de elementos de referenciación geográfica

Para un punto, los dos primeros ángulos pueden ser determinados de forma absoluta mediante observación a estrellas y cálculos de astronomía geodésica.

Con las coordenadas astronómicas de un punto únicamente se puede definir la dirección en el espacio de su vertical astronómica. Para definir la posición sobre la recta hay que recurrir a una tercera coordenada, a una *altitud* o potencial, que no se puede medir de forma directa. El uso conjunto de nivelación geométrica y gravimetría permite determinar incrementos de potencial mediante el empleo de la expresión 1.39. Una vez definido el geode y su potencial  $W_0$  es indiferente utilizar como tercera coordenada el potencial  $W$ , el número geopotencial  $C$  o la altitud ortométrica  $H$ , que se relacionan de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$W = W_0 - \int_0^H g \, dH = W_0 - C \quad (1.40)$$

$$C = W_0 - W = \int_0^H g \, dH \quad (1.41)$$

$$H = - \int_{W_0}^W \frac{dW}{g} = \int_0^C \frac{dC}{g} \quad (1.42)$$

### 1.6.6. El elipsoide como aproximación al geoide

Si la Tierra tuviera una densidad uniforme, no existiese orografía consolidada y las únicas fuerzas solicitantes fuesen la de atracción newtoniana y la centrífuga, el geoide tendría una forma de esfera achatada por los polos, de elipsoide de revolución. El hecho de que estos supuestos no sean ciertos tiene como consecuencia que el geoide se aparte del elipsoide hasta  $\pm 100m$ . Esta desviación se conoce como ondulación del geoide, con la separación entre la superficie del elipsoide y la del geoide.

La complicada forma del geoide impide que se pueda utilizar como superficie sobre la que realizar los cálculos geométricos en geodesia. Se requieren superficies de referencia con una métrica y curvatura definidas, lo que ha motivado que en geodesia geométrica se utilice como figura de aproximación el elipsoide de revolución.

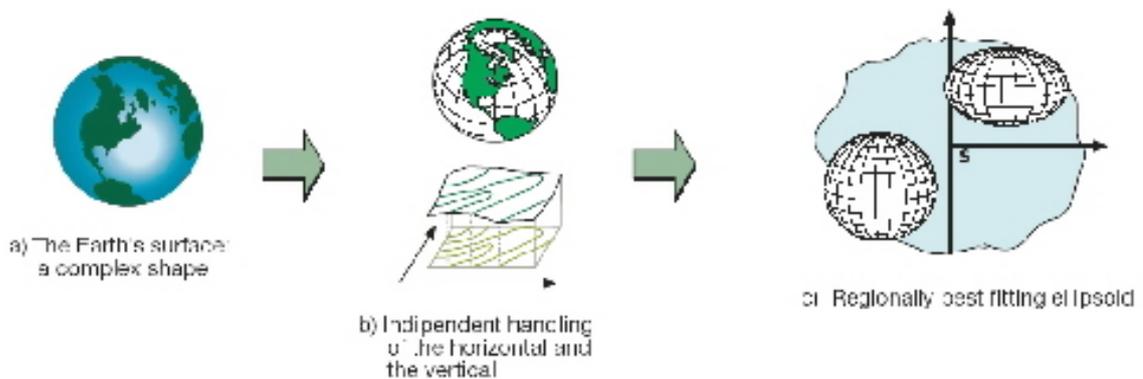


Figura 1.52: El concepto de mejor elipsoide para una zona

El sistema de referencia no se define únicamente mediante la forma y dimensiones de la superficie de referencia (radio para esfera y semiejes para elipsoide) sino que es preciso definir su localización y orientación respecto de un eje medio de rotación terrestre y su centro de masas. Esto obliga a introducir el concepto de datum en un apartado posterior.

Un elipsoide de revolución es la superficie generada por la rotación de una elipse en torno a su semieje menor, figura 1.53.

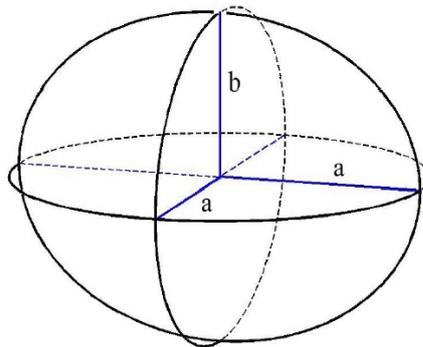


Figura 1.53: Caracterización geométrica de un elipsoide de revolución

Su forma y dimensiones queda establecida a partir de dos parámetros cualesquiera de:

- $a$ , semieje mayor
- $b$ , semieje menor

- $f$ , aplanamiento,

$$\alpha = f = \frac{a - b}{a} \quad (1.43)$$

- $e$ , primera excentricidad,

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \quad (1.44)$$

- $e'$ , segunda excentricidad,

$$e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}} \quad (1.45)$$

- $E$ , excentricidad lineal,

$$E = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (1.46)$$

- $c$ , radio de curvatura polar,

$$c = p' = \frac{a^2}{b} \quad (1.47)$$

Para simplificar ciertas expresiones en ocasiones se recurre a otras constantes tales como:

$$m = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \quad n = \frac{a - b}{a + b}, \quad p = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a}$$

Entre los parámetros geométricos del elipsoide de referencia se cumplen las siguientes relaciones:

$$b = a(1 - f) = a \frac{1 - n}{1 + n} \quad (1.49a)$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \equiv \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} \quad (1.49b)$$

$$f = 1 - \sqrt{1 - e^2} = 1 - \sqrt{\frac{1}{1 + e'^2}} = \frac{2n}{1 + n} = 1 - \sqrt{\frac{1 - m}{1 + m}} \quad (1.49c)$$

$$e^2 = 2f - f^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} = \frac{4n}{(1 + n)^2} = \frac{2m}{1 + m} \quad (1.49d)$$

$$e'^2 = \frac{2f - f^2}{(1 - f)^2} = \frac{e^2}{1 - e^2} = \frac{4n}{(1 - n)^2} = \frac{2m}{1 - m} \quad (1.49e)$$

$$c = \frac{a}{1 - f} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{b}{1 - e^2} = b(1 + e'^2) \quad (1.49f)$$

A lo largo de la segunda mitad del siglo XIX y del siglo XX, cada país definía su sistema de referencia geodésico con la elección de un elipsoide de unas dimensiones y posición tal que se ajuste al geoide en su zona de la mejor manera posible. La investigación geodésica, apoyada en costosos trabajos de campo, ha dado lugar a la aparición de elipsoides con diferentes parámetros. La tabla *Elipsoides más utilizados en sistemas de referencia geodésicos* está extraída de la librería Geographic Translator V.2.2.3. desarrollada por el *US Army Topographic Engineering Center* y la *National Imagery and Mapping Agency (NIMA)*.

La aparición de la geodesia espacial en la década de los cincuenta del siglo XX ha motivado un cambio el que se persigue la definición de sistemas de referencia geodésicos válidos para toda la Tierra, en los que interviene un elipsoide con origen en el centro de masas terrestre. En la figura 1.54 se puede apreciar la diferencia existente entre un elipsoide geocéntrico o global, con centro en el centro de masas de la Tierra, y un elipsoide local cuyo centro no coincide con el centro de masas de la Tierra.

Existen comparaciones entre elipsoides locales y globales, figura 1.55.

Denominación del elipsoide	Semieje mayor ( <i>m.</i> )	Inverso del aplanamiento
International 1924	6378388.000	297.000000000
GRS 80	6378137.000	298.257222101
WGS 84	6378137.000	298.257223563
Airy 1830	6377563.396	299.324964600
Modified Airy	6377340.189	299.324964600
Australian National	6378160.000	298.250000000
Bessel 1841(Namibia)	6377483.865	299.152812800
Bessel 1841	6377397.155	299.152812800
Clarke 1866	6378206.400	294.978698200
Clarke 1880	6378249.145	293.465000000
Everest (India 1830)	6377276.345	300.801700000
Everest (E. Malasia, Brunei)	6377298.556	300.801700000
Everest 1956 (India)	6377301.243	300.801700000
Everest 1969 (West Malasia)	6377295.664	300.801700000
Everest 1948(W.Mals. & Sing.)	6377304.063	300.801700000
Everest (Pakistan)	6377309.613	300.801700000
Mod. Fischer 1960(South Asia)	6378155.000	298.300000000
Helmert 1906	6378200.000	298.300000000
Hough 1960	6378270.000	297.000000000
Indonesian 1974	6378160.000	298.247000000
Krassovsky 1940	6378245.000	298.300000000
South American 1969	6378160.000	298.250000000
WGS 72	6378135.000	298.260000000
Standard Sphere	6371000.0	0

Cuadro 1.12: Elipsoides más utilizados en sistemas de referencia geodésicos

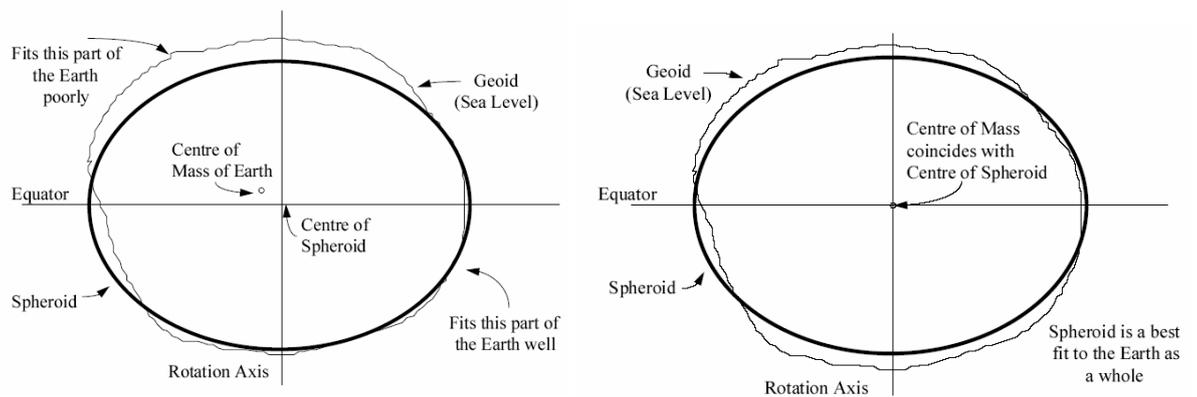


Figura 1.54: Elipsoide global frente a local

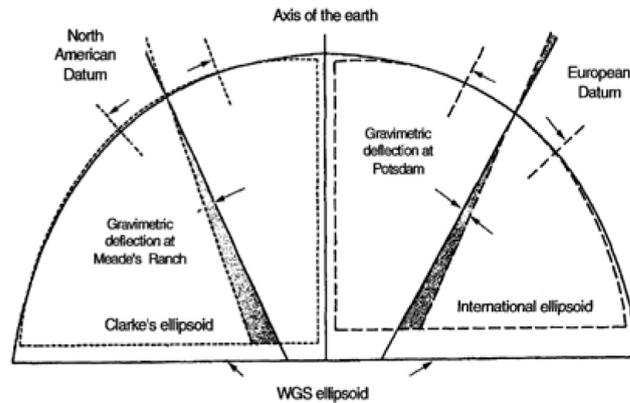


Figura 1.55: Comparación de elipsoides

### 1.6.7. Relación entre la superficie terrestre, el geode y el elipsoide de referencia. Ondulación del geode

Una vez escogida la superficie de referencia de un sistema de referencia geodésico, un elipsoide de revolución, un punto en el espacio puede proyectarse sobre la misma de múltiples formas. En geodesia se emplean fundamentalmente dos.

La primera forma de proyectar, conocida como proyección de *Pizzeti*, se basa en una doble proyección. En primer lugar, el punto  $P$  sobre el terreno se proyecta sobre el geode siguiendo la línea de la plomada, dando lugar al punto  $P_0$ . A continuación, este último punto se proyecta sobre el elipsoide de referencia siguiendo la normal a este último, obteniéndose el punto  $Q_0$ .

La segunda, más simple, recibe el nombre de proyección de *Helmert* y consiste en proyectar directamente el punto  $P$  sobre el elipsoide siguiendo la normal a éste, obteniéndose el punto  $Q$ .

En la figura 1.56 se observan las dos proyecciones para un punto arbitrario  $P$  de la superficie terrestre.

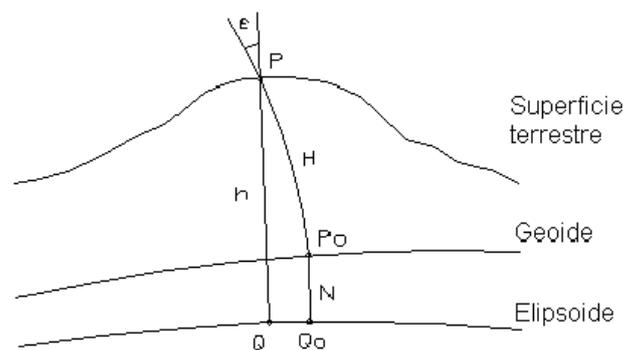


Figura 1.56: Proyección de un punto de la superficie terrestre sobre el geode y elipsoide

En altimetría, la diferencia entre ambas proyecciones es pequeña. La diferencia entre la altitud elipsoidal,  $h$ , y la suma de la altitud ortométrica,  $H$ , y de la ondulación del geode,  $N$ , es inferior, generalmente, a un milímetro. La relación entre los dos sistemas de altitudes viene dada por la expresión

$$h = H + N \quad (1.50)$$

En planimetría, por el contrario, dan lugar a puntos con diferentes coordenadas. Desde el punto de vista práctico, esta diferencia (en general inferior a 30 cm.) no representa ningún problema, ya que aún en casos de fuerte desviación de la vertical y grandes altitudes, siempre está por debajo de la precisión que rinde la determinación astronómica de coordenadas, del orden, en el mejor de los casos, de  $0''.1$  (equivalente a unos 3 m.).

La proyección de Pizzetti está mejor adaptada al campo gravitatorio ya que cualquier punto de la misma vertical física tiene siempre la misma proyección, tanto sobre el geoide como sobre el elipsoide, lo que no ocurre con la proyección de Helmert. Esta última tiene ventajas prácticas, fundamentalmente para la conversión de coordenadas elipsoidales a coordenadas cartesianas geocéntricas.

En el caso de trabajar con coordenadas astronómicas, será necesario distinguir cuidadosamente cuando las coordenadas astronómicas se refieren al punto situado sobre la superficie terrestre  $P$  o al punto del geoide  $P_0$  ya que curvaturas de la línea de la plomada de tan sólo  $1''$  representan desplazamientos planimétricos de 30 m. sobre la superficie terrestre.

### 1.6.8. Coordenadas geodésicas

Considérese, de acuerdo a la figura 1.57, sobre la superficie del elipsoide un punto genérico  $P$  y un punto que se utilizará para definir el origen de una de las coordenadas geodésicas,  $Gr$ , que idealmente corresponde a la proyección en la superficie del elipsoide del observatorio astronómico de Greenwich, utilizado en la actualidad como origen de longitudes geodésicas en la mayoría de los sistemas de referencia geodésicos.

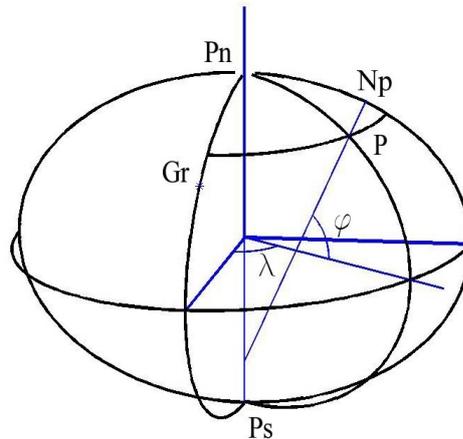


Figura 1.57: Coordenadas geodésicas

Se definen como elementos de referenciación geodésica:

- *Eje fundamental.-*  
Eje coincidente con el semieje menor del elipsoide.
- *Plano paralelo geodésico.-*  
Cualquier plano perpendicular al eje fundamental geodésico. Aquel que contiene al centro del elipsoide se denomina *plano ecuatorial geodésico*. Para un punto arbitrario se define como *plano paralelo geodésico del punto* al plano paralelo geodésico que contiene al punto.
- *Hemisferios norte y sur geodésicos.-*  
El plano ecuatorial geodésico divide a la superficie del elipsoide en dos regiones. Aquella región en la que se sitúa el polo norte astronómico se denomina hemisferio norte geodésico, siendo la región restante el hemisferio sur geodésico.

- *Polos geodésicos.-*  
 Intersecciones del eje fundamental geodésico con la superficie del elipsoide. La intersección situada en el hemisferio norte geodésico se denomina *polo norte geodésico*,  $P_N$ , denominándose *polo sur geodésico*,  $P_S$ , a la intersección localizada en el hemisferio sur.
- *Plano horizonte geodésico de un punto.-*  
 Es el plano tangente a la superficie del elipsoide en el punto.
- *Vertical geodésica de un punto.-*  
 Es la recta que tiene por dirección la normal al plano horizonte geodésico del punto, también definida como la recta normal al elipsoide en el punto.
- *Latitud geodésica de un punto.-*  
 Es el ángulo formado por la vertical geodésica del punto y el plano ecuador geodésico. Es una de las coordenadas geodésicas. Se suele denotar con la letra del alfabeto griego  $\varphi$ , aunque es frecuente encontrar textos en los que se denota como  $B$ ,  $L$ ,  $\phi$ ,  $\Phi$ , ... De acuerdo a la definición anterior los puntos situados sobre el ecuador geodésico tendrán latitud geodésica  $0^\circ$ , debido a que el plano ecuatorial contiene a la vertical geodésica de estos puntos al ser el plano horizonte geodésico ortogonal al plano ecuatorial geodésico en los mismos. La latitud se mide en sentido positivo en el hemisferio norte geodésico y en sentido negativo en el hemisferio sur geodésico, creciendo su valor absoluto del ecuador geodésico a los polos geodésicos, por lo que su dominio es:  $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$ , quedando excluidos de la representación los polos.
- *Paralelo geodésico.-*  
 Curva plana circular resultado de la intersección de cualquier plano paralelo geodésico con el elipsoide. En particular, el *ecuador geodésico* es el generado por la intersección del plano ecuatorial geodésico con el elipsoide. Para un punto, se define como *paralelo geodésico del punto* el paralelo geodésico que contiene al punto. Los puntos contenidos en un paralelo geodésico se caracterizan por tener la misma latitud geodésica.
- *Plano meridiano geodésico.-*  
 Cualquier plano que contenga al eje fundamental. En particular, aquel que contenga al punto origen ( Gr, generalmente ) se denomina *plano meridiano origen*. Para un punto se define como *plano meridiano del punto* al plano meridiano que lo contiene.
- *Meridiano geodésico de un punto.-*  
 La intersección del plano meridiano del punto con el elipsoide genera una curva plana cuya ecuación es la de una elipse. Se define como meridiano geodésico del punto a la semielipse de  $P_N$  a  $P_S$  que contiene al punto  $P$ , es decir, el arco de elipse  $P_N P P_S$ . El arco de semi-elipse restante se define como *antimeridiano geodésico del punto*. En particular, en el plano meridiano geodésico origen se define el *meridiano geodésico origen*.
- *Hemisferios este y oeste ( oriental y occidental ) geodésicos de un punto.-*  
 El plano meridiano geodésico de un punto divide a la superficie del elipsoide en dos mitades. La mitad que va del meridiano geodésico del punto al antimeridiano en el sentido trigonométrico ( observado desde el polo norte geodésico ) es el hemisferio este geodésico, también denominado oriental, del punto, siendo la otra mitad el hemisferio oeste u occidental geodésico. De acuerdo a la definición anterior, todos los puntos de un mismo meridiano geodésico tienen los mismos hemisferios oriental y occidental. Cuando se hace referencia genérica al hemisferio oriental o al occidental sin especificar el punto al que se refieren se entiende que corresponden al meridiano origen.
- *Longitud geodésica de un punto.-*  
 Es el ángulo formado por el plano meridiano geodésico del punto y el plano meridiano geodésico origen. Es la segunda coordenada geodésica del punto. Se suele denotar con la letra del alfabeto griego  $\lambda$ , aunque es frecuente encontrar textos en los que se denota como  $M$ ,  $\Lambda$ , ... Todos los puntos que pertenecen a un mismo meridiano geodésico se caracterizan por tener la misma longitud geodésica. En particular todos los puntos del meridiano origen tienen longitud geodésica  $0^\circ$ . Para los puntos del hemisferio oriental geodésico será mayor de  $0^\circ$  y

menor o igual a  $180^\circ$  ( su valor crece en el sentido trigonométrico ), mientras que para el hemisferio occidental será menor de  $0^\circ$  y mayor que  $-180^\circ$  ( su valor absoluto crece en sentido retrogrado ). En definitiva, el dominio de la longitud geodésica es:  $-180^\circ < \lambda \leq 180^\circ$ . Obsérvese que la longitud geodésica de cualquier punto del antimeridiano geodésico origen es  $180^\circ$ .

- *Verticales geodésicos de un punto, o planos normales de un punto.-*  
 Para un punto, se define como vertical geodésico a cualquier plano que contenga a la vertical geodésica del punto. La intersección de un vertical geodésico con el elipsoide da lugar a una sección normal geodésica, que es una curva plana. Hay dos verticales geodésicos que cobran especial relevancia. Se define como *vertical geodésico origen de un punto*, a aquel que contiene al meridiano geodésico del punto, definiendo su intersección la *línea norte-sur geodésica*, o *línea meridiana geodésica del punto*. Se define como *primer vertical geodésico de un punto*, a aquel que forma un ángulo recto con el plano meridiano del punto.
- *Secciones normales directa y recíproca del punto P a Q.-*  
 La sección normal de P a Q es la curva intersección del plano normal de P a Q con el elipsoide.  
 En general, tal y como se demostrará posteriormente, el vertical geodésico de P que contiene a Q no coincide con el vertical geodésico en Q que contiene a P, lo que se debe a que las verticales geodésicas en ambos puntos no están contenidas en un mismo plano. En consecuencia, las secciones normales de P a Q y de Q a P no tienen porqué coincidir. Lo anterior motiva que en el sentido de P a Q se distingan como sección normal directa a la definida por la vertical geodésica de P y el punto Q, y sección normal inversa a la definida por la vertical geodésica en Q y el punto P.
- *Acimut geodésico de una curva sobre el elipsoide en un punto.-*  
 Por un punto arbitrario P de la superficie del elipsoide pasan infinitas curvas contenidas en esta superficie. Diferentes curvas pueden tener la misma tangente en el punto P. Se define el acimut geodésico de una curva en un punto como el ángulo que forma el vertical geodésico que contiene a su tangente con el vertical geodésico origen, en el punto, medido de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  en el sentido retrógrado con origen en el norte de la línea meridiana geodésica. El acimut geodésico se acostumbra a denotar con la letra del alfabeto griego  $\theta$ , aunque es frecuente encontrar textos en los que se denota como  $\alpha$ , A, Z, ... De esta forma, el acimut geodésico hacia el norte es  $0^\circ$ , mientras que hacia el sur es de  $180^\circ$ . El dominio del acimut geodésico es:  $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ . La figura 1.58 representa el acimut geodésico del punto  $P_1$  al punto  $P_2$ .

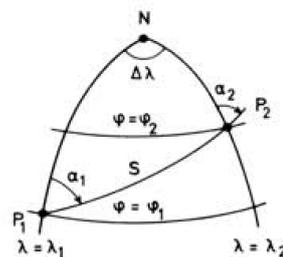


Figura 1.58: Acimut geodésico

La posición de un punto respecto del sistema de referencia también la podremos expresar en coordenadas cartesianas tridimensionales respecto del sistema de tales coordenadas previamente definido:

- El origen  $(0, 0, 0)$  es el centro del elipsoide.
- El eje Z es el eje de revolución del elipsoide.

- El eje plano  $Y = 0$  contiene al origen de longitudes, Greenwich, y el sentido del eje  $X$  es tal que éste punto tiene coordenada  $X$  positiva.
- El eje  $Y$  completa una terna dextrógira con los dos ejes anteriores.

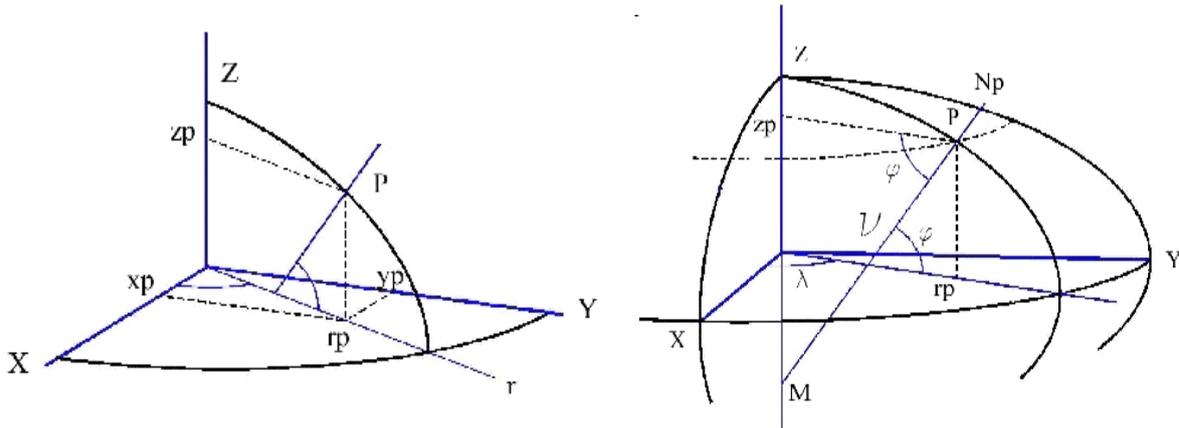


Figura 1.59: Coordenadas cartesianas geocéntricas

Tal y como se estudiará posteriormente, y de acuerdo a la figura 1.14, las coordenadas cartesianas geocéntricas de un punto se corresponden con las expresiones:

$$x = (\nu + h) \cos \varphi \cos \lambda \quad (1.51a)$$

$$y = (\nu + h) \cos \varphi \sin \lambda \quad (1.51b)$$

$$z = (\nu (1 - e^2) + h) \sin \varphi \quad (1.51c)$$

donde,

$$\nu(\varphi) = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.52)$$

Las expresiones anteriores se han generalizado para un punto sobre la superficie terrestre, figura 1.60.

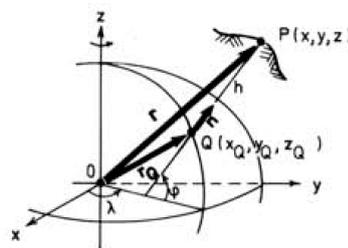


Figura 1.60: Coordenadas geodésicas de un punto de la superficie terrestre

### 1.6.9. La desviación de la vertical

Se denomina desviación de la vertical en un punto  $P$  al ángulo que forman en el punto la vertical geodésica y la vertical astronómica, figura 1.61.

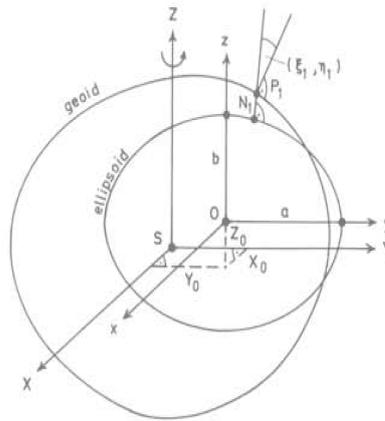


Figura 1.61: Desviación de la vertical

Mientras que la vertical astronómica es independiente del elipsoide elegido, tanto por sus dimensiones como posición relativa respecto al geode, no así la vertical geodésica, por lo que la desviación cambia para cada sistema de referencia geodésico. De esta forma, si el elipsoide de referencia es global se habla de *desviación absoluta* de la vertical, mientras que si el elipsoide de referencia empleado es local, se denomina *desviación relativa* de la vertical.

Las desviaciones de la vertical pueden llegar a alcanzar, sobre todo en zonas montañosas, valores del orden de 1'.

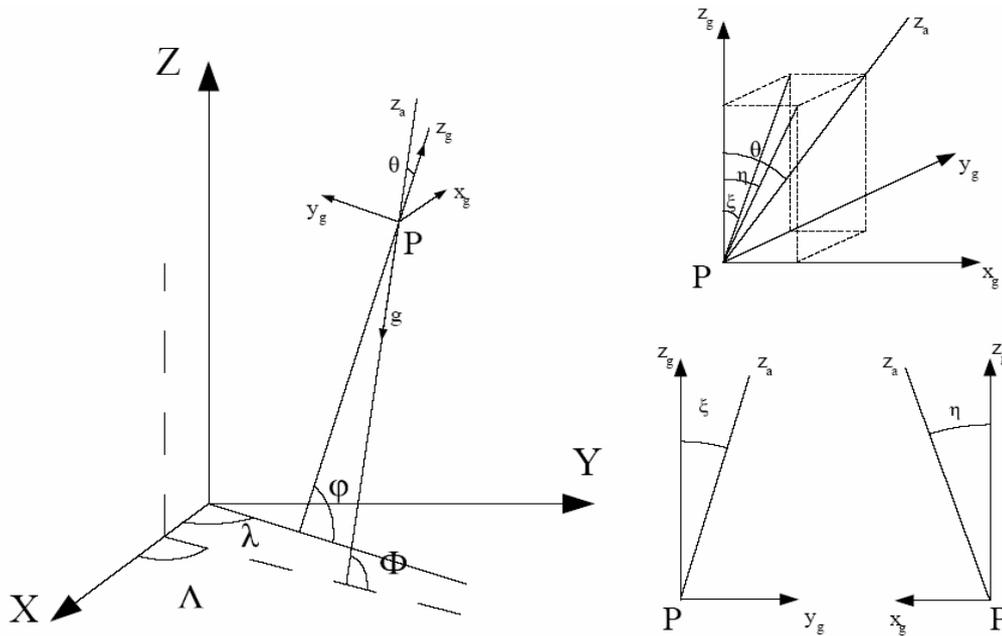


Figura 1.62: Componentes de la desviación de la vertical

La *desviación de la vertical en superficie*, definida como el ángulo que forman el vector de gravedad real en el punto  $P$  de la superficie terrestre y la normal al elipsoide de referencia no coincide con la desviación de la vertical en el geode. La diferencia entre ambas depende de la curvatura de la línea de la plomada y de la altitud del punto considerado. Generalmente, las mayores diferencias de desviación de la vertical entre la superficie y el geode, se corresponden con áreas montañosas. En los Alpes, por ejemplo, se han encontrado diferencias de hasta 12". Esto significa, que las coordenadas astronómicas de un punto en la superficie diferirían 12" con respecto a las

coordenadas astronómicas de ese mismo punto proyectado en el geoide, lo que planimétricamente representa más de 300 m.

Al ser  $\theta$  un ángulo en el espacio es conveniente para su utilización práctica en los cálculos geodésicos proyectarlo según las direcciones principales del punto considerado, figura 1.62, generando dos componentes, tal y como se observa en la figura 1.62:

$$\begin{aligned} \xi & \text{ proyección de } \theta \text{ sobre el plano meridiano} \\ \eta & \text{ proyección de } \theta \text{ sobre el primer vertical} \end{aligned}$$

siendo ambas componentes ortogonales entre sí.

### 1.6.10. Sistema de Referencia Geodésico. Concepto de datum

Uno de los objetivos de la geodesia es determinar las coordenadas de los puntos de la superficie terrestre respecto a un sistema de referencia único. A efectos de representar planimétricamente la superficie terrestre, a los sistemas de referencia geodésicos se les suele asociar también un elipsoide como aproximación de la figura de equilibrio o geoide. Debido al comportamiento elástico del planeta, uno de los problemas que presentan los sistemas de referencia terrestres son los cambios en la dirección del vector de rotación respecto a la corteza, así como variaciones en el módulo del mismo. Estos cambios son apreciables a partir de una precisión relativa en las coordenadas del orden de 1 ppm.

Como ya se mencionó al estudiar la geometría del campo gravitatorio terrestre en la sección 1.6.4, los métodos clásicos empleados para determinar las dimensiones del elipsoide de referencia, así como su orientación en el espacio, se basaban en la determinación astronómica de latitudes, longitudes y acimutes. Para ello, es necesario observar angularmente estrellas cuya situación en el espacio es conocida. La determinación de las coordenadas de las estrellas es objeto de la *astronomía de posición*.

En la actualidad, gracias a los avances experimentados por la geodesia espacial y las mediciones efectuadas a satélites artificiales, la determinación de coordenadas a largas distancias ha visto notablemente incrementada su precisión (alcanzando 0,001 ppm.), lo que permite medir desplazamientos geodinámicos de la corteza terrestre, aunque introduce un nuevo problema, ya que el marco de referencia experimenta una variación continua en sus coordenadas. Para el correcto mantenimiento del sistema de referencia es ahora necesario referir las coordenadas de los puntos que conforman el marco de referencia a una época determinada, así como expresar su velocidad de variación. Bajo este concepto surge el *Marco de Referencia Terrestre Internacional* (ITRF, de International Terrestrial Reference Frame) que constituye el marco de referencia más preciso en la actualidad.

Independientemente de los problemas planteados en la definición de los sistemas de referencia, coexisten diferentes *sistemas de referencia convencionales* tanto terrestres, como espaciales, con el objeto de permitir su utilización en la práctica geodésica de las diferentes instituciones cartográficas.

Una vez definido el sistema de referencia se pueden emplear diferentes sistemas de coordenadas para expresar tanto la posición de un punto, la posición relativa definida por dos puntos, etc., como por ejemplo: coordenadas cartesianas geocéntricas  $(X, Y, Z)$ , coordenadas geodésicas y altitud referida al elipsoide  $(\varphi, \lambda, h)$ , coordenadas geodésicas y altitud referida al geoide  $(\varphi, \lambda, H)$ , coordenadas planas sobre una determinada proyección y altitud ortométrica  $(x, y, H)$ , etc.

El resultado de una observación geodésica se expresa como ángulos y distancias medidos entre puntos materializados en el terreno. Estas cantidades se pueden obtener por métodos clásicos o bien, como se hace en la actualidad, a partir de ciertas magnitudes físicas, entre las que se encuentra el tiempo de recorrido de ondas electromagnéticas. A partir de cantidades geométricas, como los ángulos y distancias, y de la posición de los puntos conocidos que intervienen en la campaña de observación se transmiten las coordenadas a los puntos desconocidos. Esto es únicamente posible si previamente ha sido definido un sistema de referencia que incluya una serie de constantes físicas, como por ejemplo la velocidad de propagación de la luz en el vacío, que permitan convertir las cantidades físicas medidas en valores geométricos.

Por tanto, se denomina *sistema de referencia geodésico* al conjunto de parámetros que permiten asignar posición espacial a puntos a partir de unas coordenadas referidas al mismo, junto con

una serie de constantes físicas que permiten describir completamente el modelo funcional de las observaciones.

Entre las funciones de la geodesia se encuentra la definición de sistemas de referencia geodésicos. Definir un sistema de referencia en el espacio afín de dimensión 3 implica fijar un origen, la dirección en el espacio de tres ejes ( de tres vectores que constituyan una base del espacio vectorial asociado al espacio afín ) y definir una métrica, que para el espacio afín euclídeo será la deducida del producto escalar estándar.

Generalmente se escoge un sistema cartesiano ortogonal  $OXYZ$  dextrógiro con origen en el geocentro. Al eje  $OZ$  se le denomina recta o eje fundamental y al eje  $OX$  eje origen. Los planos  $OXY$  y  $OXZ$  constituyen los planos fundamentales. Nótese que tanto la definición del geocentro como las direcciones de los ejes mantiene una estrecha relación con aspectos físicos de la Tierra: campo gravitatorio, rotación, distribución de masas, deformaciones, etc.

Para que las coordenadas de un punto de la corteza no varíen en el tiempo, una de las condiciones que se debe de cumplir es que el eje origen escogido debe girar en torno al eje fundamental del sistema de referencia, de forma solidaria a la rotación terrestre. Uno de los problemas que presentan los sistemas de referencia terrestres es que se producen cambios en la dirección del vector de rotación respecto a la corteza, así como variaciones en la propia velocidad de rotación.

A efectos de representar planimétricamente la superficie terrestre, a los sistemas de referencia geodésicos se les suele asociar también un elipsoide como aproximación de la figura de equilibrio o geoide. La determinación del elipsoide de referencia incluye, además de los aspectos geométricos de forma y tamaño, parámetros físicos como la constante gravitacional, masa terrestre total, potencial en su superficie, velocidad de rotación, etc.

Se denomina *datum geodésico* al conjunto mínimo de parámetros que permiten definir de forma única la situación, orientación y constantes físicas de un sistema de referencia geodésico. Evidentemente, un sistema de referencia geodésico puede tener varios datums equivalentes que lo definan. Existen diferentes formas de definir un sistema de referencia geodésico:

- Dando la situación del origen y orientación de los ejes.
- Mediante un conjunto de puntos de coordenadas conocidas.
- A través de unos parámetros de transformación que permitan relacionarlo con un sistema de referencia anteriormente definido, figura 1.63.

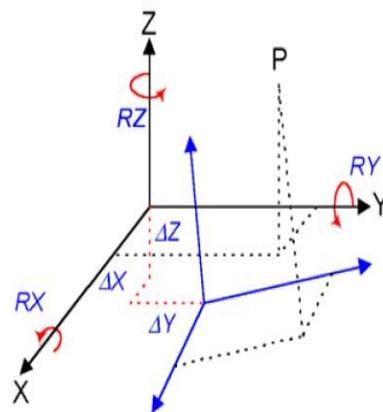


Figura 1.63: Relación entre sistemas de referencia geodésicos

La primera forma de situarlo es una definición física del sistema, ya que exige la utilización de ciertos modelos físicos. Por el contrario, los dos últimos puntos reflejan las formas habitualmente empleadas en geodesia para hacerlo.

Desde el punto de vista geométrico, la definición de unos ejes cartesianos pasa por fijar seis parámetros: tres coordenadas para situar el origen y tres giros para situar los ejes. Por tanto,

prescindiendo de la superficie de referencia y de las constantes físicas, el número de parámetros que constituye el datum es seis.

La forma tradicional de orientar un elipsoide en el espacio consiste en establecer en el denominado *punto fundamental*, de coordenadas  $(\Phi_0, \Lambda_0, H_0)$ , los siguientes parámetros:

$\varphi_0$	latitud geodésica del punto fundamental
$\lambda_0$	longitud geodésica del punto fundamental
$h_0$	altitud elipsódica del punto fundamental
$\xi_0$	desviación de la vertical en dirección del meridiano
$\eta_0$	desviación de la vertical en dirección del primer vertical
$\alpha_0$	acimut geodésico a otro punto de la red

Adicionalmente, a efectos de asegurar el paralelismo entre el eje menor del elipsoide y el eje  $Z$  del sistema cartesiano geocéntrico, se impone el cumplimiento de las ecuaciones 1.53 y 1.54 en el punto fundamental:

$$\Phi_0 - \varphi_0 = \xi_0 \quad (1.53)$$

$$(\Lambda_0 - \lambda_0) \cos \varphi_0 = \eta_0 \quad (1.54)$$

Los seis parámetros topocéntricos  $\varphi_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $h_0$ ,  $\xi_0$ ,  $\eta_0$  y  $\alpha_0$  equivalen a los seis parámetros que definen el datum en un sistema cartesiano geocéntrico: tres traslaciones y tres rotaciones. Sin embargo, ambos grupos de parámetros no pueden relacionarse de forma directa.

La relación entre la altitud ortométrica y la elipsoidal viene dada por la ondulación del geode,  $N$ , figura 1.64.

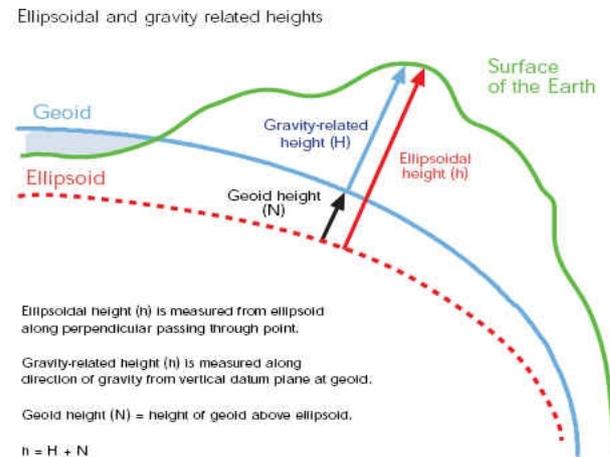


Figura 1.64: Ondulación del geode

En la actualidad la tendencia es adoptar elipsoides de referencia globales, determinados a partir de la utilización conjunta de mediciones gravimétricas, de satélites artificiales, etc. La separación entre un elipsoide de referencia global bien determinado y el geode es inferior a los 100 m. en cualquier punto del planeta. A los elipsoides globales se les asigna además una masa y una velocidad de rotación, constituyendo elipsoides de nivel. El potencial generado por un elipsoide de este tipo recibe el nombre de potencial normal y constituye una buena aproximación al potencial gravitatorio real.

Asociado al potencial normal se define el vector gravedad normal,  $\bar{\gamma}$ , y su norma es la gravedad normal,  $\gamma$ . La fórmula de la gravedad normal describe la gravedad como función de la latitud geodésica y de la altitud elipsoidal para un modelo de tierra elipsoidal.

Para un punto  $P$  de la superficie terrestre se define el vector anomalía de la gravedad como,

$$\overline{\Delta g} = \overline{g}_P - \overline{\gamma}_Q \quad (1.55)$$

siendo  $\overline{\gamma}_Q$  la gravedad normal sobre la proyección del punto en el geoide. La norma del vector anomalía de la gravedad es la anomalía de la gravedad.

La fórmula de la gravedad deducida en 1901 por Helmert establece que

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi) \quad (1.56)$$

donde  $\gamma_e$  es la gravedad normal en el ecuador y  $\beta$  es el denominado aplanamiento gravitatorio, calculado a partir del modelo de distribución de masas del elipsoide.  $\beta_1$  se calcula a partir del aplanamiento y semieje mayor del elipsoide y de la velocidad angular de rotación terrestre,

$$\beta_1 = -\frac{1}{8}f^2 + \frac{5}{8}f \frac{\varpi^2 a}{\gamma_e} \quad (1.57)$$

A lo largo de la historia han ido mejorándose el modelo del campo gravitatorio terrestre y las constantes relacionadas.

A modo de ejemplo se introducen los parámetros adoptados en 1979 por la Asociación Internacional de Geodesia en la definición del Sistema de Referencia Geodesico 1980 (GRS80):

- Elipsoide global geocéntrico:  $a = 6378137,0 \text{ m}$ . y  $f = 1/298,257222101$ .
- Constante geocéntrica gravitacional (incluyendo la atmósfera):  $GM = 398600,5 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
- Velocidad angular de rotación terrestre:  $\varpi = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$
- Potencial normal del elipsoide:  $U_0 = 6,2636861 \cdot 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$
- Gravedad normal en ecuador y polos:  $\gamma_e = 9,7803268 \text{ m s}^{-2}$ ,  $\gamma_p = 9,8321864 \text{ m s}^{-2}$
- Aplanamiento gravitatorio:  $\beta = 0,005302440$
- Expresión para obtener la gravedad normal en función de la latitud y la altitud

$$\gamma(\varphi, h) = \gamma_0 - 3,0877 \cdot 10^{-6} (1 - 0,00142 \sin^2 \varphi) h + 0,75 \cdot 10^{-12} h^2 \text{ m s}^{-2} \quad (1.58)$$

donde  $h$  debe entrar en metros y  $\gamma_0$  se obtiene con la expresión .

En cuanto a la formulación del campo gravitatorio terrestre, sirva de ejemplo la formulación incluida a continuación para el modelo del geoide EGM96 desarrollado por la NIMA para el sistema de referencia geodésico WGS84 al que viene referido el sistema GPS,

$$W = V + \frac{1}{2}\varpi^2 (x^2 + y^2), \quad V = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{n_{\text{máx}}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n \overline{P}_{nm}(\sin \phi') (\overline{C}_{nm} \cos m\lambda + \overline{S}_{nm} \sin m\lambda) \right] \quad (1.59)$$

que se expresa como un desarrollo en serie de un gran número de términos y donde intervienen una serie de coeficientes calculados para el modelo. Para este caso  $n$  y  $m$  alcanzan el grado 360 de manera que intervienen 130317 coeficientes. Del modelo se deducen expresiones también para las ondulaciones del geoide, figura 1.65, cuyo resultado se distribuye como una malla de puntos con un paso de quince minutos en latitud y longitud.

A lo largo de 2006 se publicará el nuevo modelo EGM06 con 4.7 millones de coeficientes ( $n = m = 2160$ ) con el que se prevee se alcanzará una precisión en la determinación de la ondulación del geoide del orden de 0,15  $m$ .

En un capítulo posterior se estudiarán los sistemas de referencia geodésicos empleados en la actualidad en España.

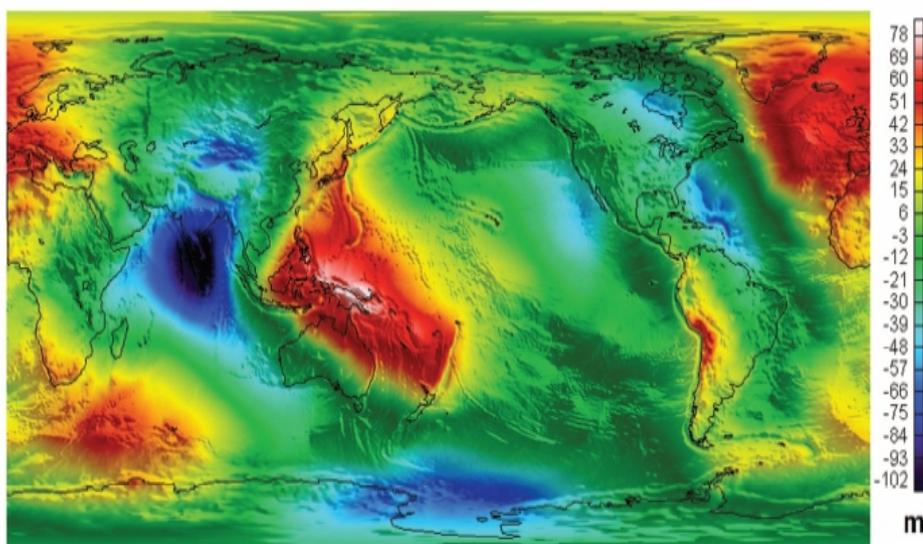


FIG. 3. The  $15' \times 15'$  global geoid undulations produced by EGM96 (Lemoine et al., 1998). The undulations range from  $-107$  m to  $85$  m. Black lines indicate coast lines.

Figura 1.65: Modelo del geode Egm96 para WGS84

### 1.6.11. Marco de referencia geodésico

Tal como se ha definido el concepto, un sistema de referencia geodésico es algo abstracto. La definición convencional del mismo viene dada por un conjunto de puntos materiales dotados de posición en el teórico sistema de referencia geodésico, posición expresada en un determinado sistema de coordenadas. A dicho conjunto de puntos dotados de coordenadas se le denomina *marco de referencia geodésico*.

El marco de referencia geodésico lleva a su vez implícito el datum geodésico. Por ello, disponer de una serie de puntos dotados de coordenadas respecto a un mismo sistema de referencia geodésico, constituye una de las formas habitualmente empleadas en geodesia para definir el datum geodésico. El problema que se plantea a la hora de definir el datum geodésico a partir de un marco de referencia geodésico es la inexactitud de las coordenadas. Las coordenadas, obtenidas a partir de procesos geodésicos de medición, inexorablemente presentan errores de tipo absoluto y relativo que impiden la definición de un único datum geodésico. Para ilustrar esto último, se hará uso de la tercera forma de definir un datum geodésico, es decir, a través de unos parámetros de transformación que lo relacionen con un datum geodésico previamente establecido. Supónganse un conjunto de puntos cuya posición es conocida en dos sistemas de referencia geodésicos diferentes a través de sus coordenadas cartesianas geocéntricas en ambos. A continuación se plantea una transformación de Helmert tridimensional de siete parámetros: tres traslaciones, tres giros y un factor de escala, para determinar la transformación existente entre los dos sistemas de referencia geodésicos. Dado que cada punto conocido en ambos sistemas de referencia geodésicos permite plantear un sistema de tres ecuaciones en el que intervienen como incógnitas los siete parámetros de transformación, para determinar dichos parámetros se necesitarán al menos tres puntos<sup>1</sup> de posición conocida en ambos sistemas de referencia geodésicos. Si la posición de cada punto en cada uno de los sistemas de referencia geodésicos se conociera sin error alguno, los parámetros de transformación serían únicos y una vez determinados, conocido el datum geodésico del primer sistema de referencia geodésico se puede decir que constituyen el datum geodésico del segundo sistema de referencia geodésico. Pero la realidad es que toda posición, toda coordenada, está, en mayor o menor medida, afectada de error y por tanto, cada subgrupo de tres puntos produciría unos parámetros de transformación diferentes, definirían sistemas de referencia geodésicos diferentes. El grado de diferencia dependerá de la precisión de las redes geodésicas en la que estén incluidos los puntos utilizados. La transformación

<sup>1</sup>Prescindiendo de la escala el número de parámetros se reduce a seis, pero igualmente son necesarios al menos tres puntos de coordenadas conocidas en ambos sistemas para resolver geoméricamente la transformación tridimensional.

Cambios en el <i>geoide</i>	$\sim 10^{-11}$
Téctica de placas, movimientos verticales de la corteza	$\sim 10^{-9}$
Movimiento del Polo	$\sim 10^{-6}$
Deformaciones por marea terrestre	$\sim 10^{-5}$
Movimiento del polo magnético	$\sim 10^{-3}$

Cuadro 1.13: Efectos de la dinámica terrestre

entre sistemas de referencia geodésicos es una cuestión muy importante en geodesia y será tratada en detalle en un capítulo posterior.

Para mantener la precisión del sistema de referencia geodésico a lo largo del territorio se necesitan marcos de referencia geodésicos precisos que a su vez se sustentan en redes geodésicas con buena precisión relativa y absoluta.

A modo de conclusión se puede afirmar que, desde un punto de vista práctico:

- El marco de referencia geodésico es el nexo de unión que permite referir los levantamientos geodésicos realizados a un determinado datum geodésico.
- La precisión del sistema de referencia geodésico se corresponde con la precisión de las coordenadas que localmente presenta el marco de referencia geodésico.
- La precisión del marco de referencia geodésico depende de la calidad de la red geodésica llevada a cabo para su establecimiento.

Asociado a cada sistema de referencia geodésico de los empleados en España estudiaremos las redes geodésicas que constituyen su marco de referencia.

### 1.6.12. Concepción actual de geodesia

Hasta 1970, el límite en la precisión para la medición de largas distancias era del orden de  $10^{-6}$ , es decir, una parte por millón (1 ppm.). En la actualidad es posible alcanzar precisiones de  $10^{-9}$  (0.001 ppm.) en distancias de miles de kilómetros. Por tanto, se puede decir que la medición de los fenómenos que afectan a la geometría y a la dinámica del entorno de la Tierra se ha visto incrementada 1000 veces. Algunos de los fenómenos que afectan a la dinámica terrestre se han podido medir por primera vez en estas últimas décadas. Entre los fenómenos más representativos de la dinámica terrestre, ordenados por orden creciente de velocidad estimada en m/s, se encuentran los mostrados en la tabla *Efectos de la dinámica terrestre*.

El hecho de poder determinar coordenadas con gran precisión en un único sistema de referencia, midiendo así gran parte de los fenómenos que afectan a la dinámica terrestre, ha permitido a su vez profundizar en el conocimiento de otras ciencias que se nutren de esos datos, perfeccionando los modelos teóricos existentes o formulando otros nuevos. A través de estas interrelaciones se ha ido constituyendo un cuerpo común que se ha dado en llamar *Ciencias de la Tierra* o *Geociencias*.

La evolución tecnológica experimentada en la última mitad del siglo veinte, así como la ampliación del entorno objeto de estudio, obligó a la Asociación Internacional de Geodesia ( IAG, de *International Association of Geodesy* ) a adoptar en 1975 una nueva definición formal de geodesia:

*Geodesia es la ciencia de medir y representar la figura y el campo de gravedad terrestre y de otros cuerpos celestes, así como sus variaciones en el tiempo*

Esta nueva definición pone de manifiesto el hecho de que la Tierra y su dinámica se entienden integradas en un contexto más amplio, el Sistema Solar en primer término, el Universo en definitiva. Por otra parte, con el aumento de la precisión en la medición de los fenómenos de la dinámica terrestre auspiciada por el avance tecnológico se incorpora la evolución en el tiempo como parte del objeto de estudio.

En la actualidad, todo apunta a que la geodesia, como parte de las geociencias, evolucionará hacia la denominada *geodesia integral*, concepto relativo al control continuo de todas las variables

y parámetros relativos a la geodinámica susceptibles de ser obtenidos a partir de procesos geodésicos. Dicho concepto se denomina en inglés *Integrated Geodetic-Geodynamical Monitoring System (IGGM)*.

La realización técnica de IGGM se sustenta en cuatro componentes:

- La componente central es un sistema de referencia global de alta precisión al que es posible referir todas las mediciones y la determinación de parámetros efectuadas en diferentes sistemas locales. En la actualidad, el Marco de Referencia Terrestre Internacional ( ITRF, de International Terrestrial Reference Frame ) materializa dicho sistema de referencia unificado.
- La segunda componente es la determinación continua de los parámetros de rotación terrestre: movimiento del polo, precesión y nutación. Con ellos se establece la relación instantánea existente entre los sistemas de referencia terrestres y los sistemas de referencia espaciales.
- En tercer lugar aparece la determinación geométrica de coordenadas. En la actualidad, debido a la precisión que alcanzan las mediciones geodésicas es posible cuantificar la variación de coordenadas que experimentan los vértices de las redes geodésicas. Por ello se introduce el concepto de geocinemática <sup>2</sup>.
- El cuarto objeto de la geodesia integral es la determinación continua de los denominados geocampos: el campo gravitatorio y el campo magnético.

En la actualidad la geodesia puede ser considerada como parte de las geociencias y ciencias de la ingeniería, incluyendo la geomática y la navegación.

## 1.7. Relación con otras técnicas y ciencias

Son muchas las ciencias y técnicas relacionadas con la topografía. Sirva de ejemplo lo mencionado a continuación.

Topografía y Geodesia están tan íntimamente ligadas que a veces es difícil determinar donde termina una y comienza la otra.

La información tridimensional del terreno se expresa a través del lenguaje de la Cartografía. La relación entre Cartografía y muchas disciplinas de Geografía Física es evidente.

La base matemática sobre la que se fundamenta la Topografía es la geometría y trigonometría plana.

En Geodesia los conceptos físicos, teoría del potencial gravitatorio terrestre, y matemáticos, geometría de la esfera y del elipsoide, están directamente relacionados.

Hasta hace muy poco tiempo era imprescindible recurrir a observaciones a estrellas para determinar muchos de los parámetros imprescindibles en Geodesia. Hoy día la Astronomía de Posición se ve sustituida por la Geodesia Espacial, con tratamiento de información recibida de satélites artificiales.

El avance en la calidad y precisión de los instrumentos topográficos y geodésicos ha estado unido a los avances en óptica y mecánica.

La Fotogrametría se puede entender como la técnica que permite obtener información tridimensional del terreno a partir de fotografías aéreas. Su origen se remonta a la mitad del siglo pasado. Hace ya muchos años que sustituyó a la topografía clásica en levantamientos a cierta escala.

La Arquitectura se sirve cada día más de las técnicas de Fotogrametría Terrestre.

La Fotointerpretación, realizada también con tomas aéreas, es muy útil a efectos de reconocimiento de la superficie terrestre.

En las últimas décadas, la electrónica y la informática han supuesto una verdadera revolución en los instrumentos topográficos y en el tratamiento de la información.

La producción, tratamiento, gestión y almacenamiento de la información cartográfica se ha visto notablemente potenciada por los Sistemas de Información Geográfica (S.I.G.), software que incluye bases de datos gráficas y alfanuméricas con sus correspondientes programas gestores.

Los avances en tratamiento de información en formato digital permite la utilización de imágenes de satélite con fines interpretativos e incluso geométricos. Esto constituye la Teledetección.

---

<sup>2</sup>En inglés se corresponde con el término *geokinematics*, que engloba la determinación de coordenadas y su variación en el tiempo.